# 1 Kovariantni odvod

Vektorska polja v splošnem zapišemo v obliki: $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$, pri čemer so $V^\mu$ (kovariantne) komponente vektorskega polja, $\vec{e}_\mu$ pa izbrani (kovariantni) bazni vektorji. V mnogoterostih poznamo velikosti baznih vektorjev in kote med njimi, torej poznamo vrednosti vseh skalarnih produktov:

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu . \vec{e}_\nu \tag{1}$$

Naravno je definirati še kontravariantno bazo, ki jo sestavljajo vektorji, ki so ortogonalni na vse vektorje kovariantne baze, razen na tistega, kateremu so konjugirani. Kontravariantni bazni vektorji so seveda linearne kombinacije vektorjev kovariantne baze. Če vpeljemo za kontravariantno bazo vektorje:

$$\vec{e}^\mu = g^{\mu\nu} \vec{e}_\nu \tag{2}$$

pri čemer je tenzor s komponentami zapisanimi zgoraj inverzni tenzor metričnega tenzorja $g_{\mu\nu}$, ja lahko pokazati, da velja $\vec{e}_\mu . \vec{e}^\nu = \delta_\mu^{\ \nu}$.

Bazni vektorji lahko spreminjajo smer, ko se gibljemo po mnogoterosti, zato so njihovi odvodi, projicirani na mnogoterost zopet vektorji, ki jih lahko izrazimo kot linearno kombinacijo njih samih. V primeru dvorazsežnih mnogoterosti smo pokazali, da je mogoče te odvode zapisati v obliki:

$$\vec{e}_{\mu,\nu} = \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} \vec{e}_\lambda + S_{\mu\nu} \hat{n} \quad , \tag{3}$$

pri čemer je $\hat{n}$ normala na mnogoterost v točki, kjer računamo odvod, $\Gamma^\lambda_{\ \mu\nu}$ pa so Christoffelovi simboli, ki jih je mogoče izraziti samo z metričnim tenzorjem in njegovimi odvodi v naslednji obliki:

$$\Gamma^\mu_{\ \nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu}) \tag{4}$$

Odvod vektorskega polja ($\vec{V}$) v točki $\mathcal{P} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ v smeri danega vektorja ($\vec{u}$) je:

$$\vec{u}.\mathcal{D}\vec{V} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{V}(\mathcal{P} + \vec{u}h) - \vec{V}(\mathcal{P})}{h} \tag{5}$$

Pri tem je $(\mathcal{P} + \vec{u}h) = (\xi^0 + u^0 h, \xi^1 + u^1 h, \xi^2 + u^2 h, \xi^3 + u^3 h)$. Tako je:

$$\vec{u}.\mathcal{D}\vec{V} = V^\mu{}_{,\nu} \vec{e}_\mu u^\nu + V^\mu \vec{e}_{\mu,\nu} u^\nu \tag{6}$$

Pri dvorazsežnih mnogoterostih meri matrika $S_{\mu\nu}$ sukanje normale na ploskev, ko se po tangentni krivulji oddaljujemo od začetne točke. Teh komponent v splošnem ne moremo določiti, če imamo samo podatke meritev znotraj mnogoterosti. Matriko $S_{\mu\nu}$ imenujemo zato zunanja ukrivljenost. V samih mnogoterostih nam zunanja ukrivljenost ni dosegljiva, zato definiramo kovariantni odvod vektorskega polja v dani smeri glede na mnogoterost kot tisti del odvoda $\mathcal{D}$, ki ne vsebuje zunanje ukrivljenosti. Kovariantni odvod je torej:

$$\vec{u}.\nabla\vec{V} \;=\; V^{\lambda}{}_{,\nu}\,\vec{e}_{\lambda}u^{\nu} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\vec{e}_{\lambda}u^{\nu} \;=\; \vec{e}_{\lambda}(V^{\lambda}{}_{,\nu} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})\vec{e}^{\nu}.\vec{u} \tag{7}$$

Z izrazom v oklepaju so zapisane komponente kovariantnega odvoda za katerega bomo uporabljali notacijo[1]:

$$V^{\lambda}{}_{\cdot\nu} \;=\; V^{\lambda}{}_{,\nu} + V^{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \quad \text{oziroma} \quad \vec{u}.\nabla\vec{V} \;=\; (\vec{e}_{\lambda}V^{\lambda}{}_{\cdot\nu}\vec{e}^{\nu}).\vec{u} \tag{8}$$

V gornjem izrazu je jasno nakazano, da je kovariantni odvod v smeri vektorja produkt tenzorja $\nabla\vec{V}$ z vektorjem $\vec{u}$. Kovariantno odvajanje ima torej lastnost, da so komponente kovariantega odvoda vektorja komponente tenzorja, kar pomeni, da se kovarantni odvod zapiše enako v vseh koordinatnih sistemih. Zapišimo še komponente kovariantnega odvoda za kontravariantne komponente vektorja. Ponovimo korake do enačbe 5 z vektorjem izraženem v obliki $\vec{V} \;=\; V_{\mu}\vec{e}^{\mu}$. Z uporabo enačb 2 in 3 pridemo do izraza:

$$\vec{e}^{\mu}{}_{,\lambda} = (g^{\mu\nu}\vec{e}_{\nu})_{,\lambda} = g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}\,\vec{e}_{\nu} + g^{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\vec{e}_{\sigma} + S_{\nu\lambda}\hat{n}\Big) = g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}\,g_{\nu\sigma}\vec{e}^{\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\vec{e}_{\sigma} + S^{\mu}{}_{\lambda}\hat{n} \tag{9}$$

Upoštevamo, da je $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}{}_{\sigma}$ in nato s parcialnim odvajanjem pridemo do identitete $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}\,g_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma,\lambda} = 0$. Iz definicije Cristoffelovih simbolov sledi nadalje: $g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\mu\lambda}$ (pokaži to!) in tako pridemo do izraza:

$$\vec{e}^{\mu}{}_{,\lambda} \;=\; -\,\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\sigma}\vec{e}^{\sigma} + S^{\mu}{}_{\lambda}\hat{n} \tag{10}$$

Odtod sledijo kontravariantne komponente kovariantnega odvoda (primerjaj 8):

$$V_{\mu\cdot\nu} \;=\; V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}V_{\sigma} \tag{11}$$

[1]Namesto pike se kot znak kovariantnega odvajanja pogosto uporablja tudi podpičje. Tu sledimo notaciji Bryce DeWitta, ki je po pričujočem avtorju tudi bolj prijazna za uporabnika TeX -a

Kovariantno odvajanje tenzorjev je seveda definirano prav tako kot kovariantno odvajanje vektorjev - odvajamo produkte komponent z baznimi vektorji. Tako npr. velja:

$$(\vec{e}_\mu T^{\mu\nu}\vec{e}_\nu)_{,\lambda} \;=\; \vec{e}_\mu T^{\mu\nu}{}_{\cdot\lambda}\vec{e}_\nu \tag{12}$$

Odtod sledijo naslednji izrazi za komponente kovariantnih odvodov tenzorskega polja:

$$T^{\mu\nu}{}_{\cdot\lambda} \;=\; T^{\mu\nu}{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\sigma}T^{\sigma\mu} \tag{13}$$

$$T^\mu{}_{\nu\cdot\lambda} \;=\; T^\mu{}_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}T^\mu{}_\sigma \tag{14}$$

Zapomnimo si pravilo za kovariantno odvajanje! Če imajo komponente tenzorja, ki ga kovariantno odvajamo $p$ indeksov, ima kovariantni odvod poleg parcialnega odvoda komponente tenzorja po indeksu odvajanja še $p$ členov, ki so produkti Christoffelovih simbolov in komponent tenzorja in sicer tako da so indeksi Christoffelovega simbola po en indeks tenzorskega polja, indeks odvajanja in en nemi indeks, indeksi tenzorskega polja pa ostanejo, razen tistega, ki je bil uporabljen v Christoffelovem simbolu in je nadomešcen z nemim indeksom. Če je šel v Christoffelov simbol zgornji indeks, stoji pred ustreznim produktom znak plus, drugače pa znak minus.

Za primer izračunajmo kovariantni odvod tenzorske identitete, ki mora biti seveda nič. Enotsko tenzorsko polje je $\mathbf{I} = \vec{e}_\mu\vec{e}^\mu$, saj očitno preslika vsak vektor v samega sebe: $\vec{e}_\mu\vec{e}^\mu.\vec{V} \;=\; \vec{e}_\mu V^\mu$. Pokaži, da se lahko zapišejo komponente tega tenzorja bodisi v obliki $I^\mu{}_\nu \;=\; \delta^\mu{}_\nu$ ali $I_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ali $I^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Odvod enotskega tenzorskega polja v smeri vektorja $\vec{u} \;=\; u^\lambda\vec{e}_\lambda$ je seveda:

$$\vec{u}.\nabla\mathbf{I} \;=\; u^\lambda(\vec{e}_{\mu,\lambda}\,\vec{e}^\mu + \vec{e}_\mu\vec{e}^\mu{}_{,\lambda}\,) \tag{15}$$

Ko upoštevamo definicijo 3 in identiteto 10, takoj ugotovimo, da je kovariantni odvod identitete res enak nič. Torej velja tudi komponentna verzija v oblikah $\delta_\mu{}^\nu{}_{\cdot\lambda} = 0$, $g^{\mu\nu}{}_{\cdot\lambda} = 0$ in tudi $g_{\mu\nu\cdot\lambda} = 0$.

Eden od zanimivih simbolov je še popolnoma antisimetični simbol Levi-Civitàja. V štirirazsežnem prostoru je to $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Vrednost $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ je plus ena, če predstavljajo $\{\mu\nu\lambda\sigma\}$ sodo permutacijo številk $\{0\ 1\ 2\ 3\}$, minus ena če so v lihi permutaciji teh številk in nič, če sta katerakoli indeksa enaka. Po zgornjem pravilu izračunajmo kovariantni odvod:

$$\varepsilon^{012\alpha}{}_{\cdot\omega} \;=\; \Gamma^0{}_{\tau\omega}\varepsilon^{\tau12\alpha} + \Gamma^1{}_{\tau\omega}\varepsilon^{0\tau2\alpha} + \Gamma^2{}_{\tau\omega}\varepsilon^{01\tau\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\tau\omega}\varepsilon^{012\tau} \tag{16}$$

Če vzamemo $\alpha = 2$, sta oba prva člena na desni identično enaka nič zaradi enakih indeksov v simbolih, predzadnji in zadnji člen pa se uničita, ko seštejemo po neničelnih simbolih. Podobno velja za $\alpha = 0$ in $\alpha = 1$. Za $\alpha = 3$ pa dobimo:

$$\varepsilon^{0123}{}_{;\omega} = \Gamma^0{}_{\tau\omega}\varepsilon^{\tau 123} + \Gamma^1{}_{\tau\omega}\varepsilon^{0\tau 23} + \Gamma^2{}_{\tau\omega}\varepsilon^{01\tau 3} + \Gamma^3{}_{\tau\omega}\varepsilon^{012\tau} = \Gamma^\mu{}_{\mu\omega}\varepsilon^{0123} \tag{17}$$

Z upoštevanjem 4 lahko zapišemo še: $\Gamma^\mu{}_{\mu\omega} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu},_\omega$. Ta izraz lahko napišemo še drugače, če se spomnimo, da lahko determinanto $g$ matrike $g_{\mu\nu}$ zapišemo v obliki:

$$g = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\sigma} \tag{18}$$

Sledi:

$$g,_\omega = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\Big(g_{0\mu},_\omega g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\sigma} + g_{0\mu}g_{1\nu},_\omega g_{2\lambda}g_{3\sigma} + g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\lambda},_\omega g_{3\sigma} + g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\sigma},_\omega\Big) \tag{19}$$

Opazimo, da nastopajo v gornjem izrazu kodeterminante, ki pa so komponente inverznega tenzorja pomnožene z determinanto: npr. $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}g_{1\nu}g_{2\lambda}g_{3\sigma} = gg^{0\mu}$. Tako dokažemo identiteto $g,_\omega = gg^{\mu\nu}g_{\mu\nu},_\omega$. Odtod pa v skladu z zgoraj povedanim sledi, da je

$$E^{\mu\nu\lambda\sigma} = g^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{20}$$

popolnoma antisimetrični tenzor, katerega kovariantni odvod je enak nič v vseh smereh.

# 2 Riemannov tenzor in enačbe polja

Vzemimo, da imamo v okolici točke P dva šopa vzporednih krivulj, ki s svojimi tangentami definirata vektorski polji $\vec{u}$ in $\vec{w}$. Naj bodo krivulje v šopih goedetke, tako da velja $\nabla\vec{u} = 0$ in $\nabla\vec{w} = 0$. Z vektorskim poljem $\vec{V}$ na mnogoterosti lahko tvorimo novo vektorsko polje

$$\vec{A} = \vec{u}.\nabla(\vec{w}.\nabla\vec{V}) - \vec{w}.\nabla(\vec{u}.\nabla\vec{V}) \tag{21}$$

Račun komponent tega polja je premočrten, vendar zahteva nekaj potrpežljivosti. Prvi korak:

$$\vec{u}.\nabla(\vec{w}.\nabla\vec{V}) = u^\lambda(w^\nu V^\mu{}_{;\nu}\vec{e}_\mu),_\lambda = u^\lambda(\vec{w}.\vec{e}^\nu V^\mu{}_{;\nu}\vec{e}_\mu),_\lambda \tag{22}$$

V oklepaju stoji skalarni produkt vektorja s tenzorjem, zato lahko za odvajanje uporabimo pravilo 12 in dobimo:

$$\vec{u}.\nabla(\vec{w}.\nabla\vec{V}) \;=\; u^\lambda(\vec{w},_\lambda .\vec{e}^\nu V^\mu{}_{\cdot\nu}\vec{e}_\mu + \vec{w}.\vec{e}^\nu V^\mu{}_{\cdot\nu\lambda}\vec{e}_\mu) \;=\; u^\lambda w^\nu V^\mu{}_{\cdot\nu\lambda}\vec{e}_\mu \tag{23}$$

Drugi korak:

$$V^\mu{}_{\cdot\nu\lambda} \;=\; V^\mu{}_{\cdot\nu},_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}V^\sigma{}_{\cdot\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}V^\mu{}_{\cdot\sigma} \tag{24}$$

Zadnji člen je simetričen glede na zamenjavo $\nu$ in $\lambda$, zato izpade iz nadalnjih računov, ki zahtevajo samo še eno vrstico in dajo:

$$\vec{A} \;=\; u^\lambda w^\nu \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\omega},_\lambda - \Gamma^\mu{}_{\lambda\omega},_\nu + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\omega\nu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\omega\lambda}\right) V^\omega\vec{e}_\mu \tag{25}$$

Vektorsko polje $\vec{A}$ je nenavadno po tem, da ne vsebuje odvodov vektorskega polja $\vec{V}$, je antisimetrično glede na zamenjavo vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{w}$, razen tega pa je tudi ortogonalno na polje $\vec{V}$. Preslikava $\vec{V} \to \vec{V} + \vec{u}.\nabla(\vec{w}.\nabla\vec{V}) - \vec{w}.\nabla(\vec{u}.\nabla\vec{V})$ torej zavrti vektor okrog smeri, ki je odvisna od orientacije ploskve $\vec{u}\wedge\vec{w}$ za kot, ki je sorazmeren ploščini, ki jo objameta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{w}$. Smer in velikost rotacije v odvisnosti od orientacije ploskve in vektorja sta izključno lastnosti mnogoterosti in ne lastnosti kateregakoli udeleženega vektorja. Izraz v oklepaju v enačbi 25 imenujemo komponente Riemannovega tenzorja ukrivljenosti in so po dogovoru razvrščene tako, da so simetrije čim bolj jasno izražene:

$$R^\mu{}_{\omega\lambda\nu} \;=\; \Gamma^\mu{}_{\omega\nu},_\lambda - \Gamma^\mu{}_{\omega\lambda},_\nu + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\omega\nu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\omega\lambda} \tag{26}$$

Preslikavo, ki jo generira Riemannov tenzor si lahko geometrijsko predstavimo, če jo izračunamo na dvorazsežni mnogoterosti, ki si jo lahko predstavljamo kot ploskev vloženo v 3-prostor. V dvorazsežni mnogoterosti se lahko vektor zavrti samo okrog normale na mnogoterost, to je okrog smeri, ki si jo predstavljamo kot smerni "vektor" ploskvice $\vec{u}\times\vec{w}$. Kot zasuka pri preslikavi je enak ploščini $|\vec{u}\times\vec{w}|$ pomnoženi z Gaussovo ukrivljenostjo ploskve (npr. Gaussova ukrivljenost krogle s polmerom $a$ je $1/a^2$). Spomnimo se, da je vsota kotov trikotnika na sferi enaka $\pi + \delta$, kjer je $\delta$ ploščina trikotnika deljena s polmerom krogle in hitro se lahko prepričamo, da je vrtenje vektorja pri transformaciji, ki jo generira Riemannov tenzor ravno posledica geometrijskega dejstva, da se vsota trikotnikovih kotov na neravni mnogoterosti razlikuje od 180 stopinj. Če skušamo vektor paralelno samemu sebi premikati vzdolž stranic trikotnika tako da ohranjamo kot med smerjo vektorja in tangento na stranico vzdolž katere premikamo, ugotovimo, de se vektor po polnem obhodu zavrti ravno za kot $\delta$.

Na štirirazsežnih mnogoterostih je Riemannov tenzor nekoliko težje predstavljiv, vendar velja natanko isto kot zgoraj za vsako dvorazsežno podmnogoterost štirirazsežne mnogoterosti. Oboroženi z geometrijsko predstavo si lahko v 4-mnogoterosti predstavljamo 3-prostornino, npr. geometrijsko telo, ki jo omejujejo robne ploskve 2-mnogoterosti. Upravičeno je pričakovati da je vsota integralov polja $\vec{A}$ po vseh robnih ploskvah enaka nič. Če se spomnimo Gaussovega izreka, da je integral vektorskega polja po zaključeni ploskvi $\partial\mathcal{V}$, ki objame prostornino $\mathcal{V}$, enak integralu divergence tega polja po prostornini $\mathcal{V}$, lahko pričakujemo da mora obstajati nekaj kot divergenca Riemannovega polja, katere integracija po vsaki prostornini da nič. Takšne identitete res obstajajo in se imenujejo Bianchijeve identitete. Zapišemo jih takole:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma\cdot\omega} + R^{\mu}{}_{\nu\sigma\omega\cdot\lambda} + R^{\mu}{}_{\nu\omega\lambda\cdot\sigma} \;=\; R^{\mu}{}_{\nu[\lambda\sigma\cdot\omega]} \;=\; 0 \tag{27}$$

Poleg Bianchijevih identitet ima Riemannov tenzor še algebrajske simetrije antisimetričnost glede na zamenjavo v prvem ali drugem paru indeksov in simetričnost na zamenjavo prvega in drugega para indeksov. Te simetrijo implicitno sledijo iz zgoraj povedanega in jih je prav lahko preveriti z eksplicitnim računom:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} \;=\; R_{\lambda\sigma\mu\nu} \;=\; -\,R_{\nu\mu\lambda\sigma} \;=\; -\,R_{\mu\nu\sigma\lambda} \tag{28}$$

Število neodvisnih komponent Riemannovega tenzorja je 21. Do te številke pa pridemo takole: za fiksen par drugih indeksov lahko komponente Riemannovega tenzorja zapišemo v antisimetrično matriko 4×4, ki ima 6 neodvisnih komponent. Vse neodvisne komponente Riemannovega tenzorja lahko torej zapišemo v simetrično matriko 6×6, ki ima (36-6)/2+6=21 komponent.

Od tu do teorije gravitacije je le še majhen korak. Riemannov tenzor vsebuje druge odvode metričnega tenzorja, kot jih vsebujejo enačbe gravitacijkega polja za šibko polje, vendar imajo enačbe polja tenzorski rang 2 in ne 4 kot Riemannov tenzor. Zato z Riemannovim tenzorjem konstruiramo simetrični Riccijev tenzor ranga 2:

$$R_{\mu\nu} \;=\; R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{29}$$

in skalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Če pomnožimo enačbe 27 z $g^{\nu\lambda}$ in postavimo $\omega = \mu$ (seštejemo po tem indeksu) dobimo (upoštevaje $g^{\mu\nu}{}_{\cdot\lambda} = 0$ in $\delta^{\mu}{}_{\nu\cdot\mu} = 0$):

$$R_{\cdot\sigma} - 2R^{\mu}{}_{\sigma\cdot\mu} \;=\; -\,2(R^{\mu}{}_{\sigma} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\sigma}R)_{\cdot\mu} \;=\; 0 \tag{30}$$

Ta izraz je prav tak kot identiteta, ki ji ustrezajo enače šibkega gravitacijskega polja in vodi do ohranitvenih zakonov! Izraz v oklepaju, imenovan Einsteinov tenzor in označen z $G$ je v približku šibkega polja res enak levi stranji enačb gravitacijskega polja, ki smo jih dobili v približku šibkega polja. Izračunajmo Einsteinov tenzor v približku šibkega polja! Takrat je $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, komponente $h$ pa so tako majhne, da lahko njihove kvadrate zanemarimo. V Riemannovem tenzorju ostanejo samo drugi odvodi $h$-jev, saj nastopajo prvi odvodi samo v neodvajanih Christoffelovih simbolih, ki pa nastopajo v parih. V tem približku dobimo[2]:

$$R_{\mu\omega\lambda\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu\nu},_{\omega\lambda} + h_{\omega\lambda},_{\mu\nu} - h_{\omega\nu},_{\mu\lambda} - h_{\mu\lambda},_{\omega\nu}) \tag{31}$$

Spomnimo se notacije $U_\mu = h_{\mu\nu},^{\nu}$ in $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ in z njo zapišemo še linearni približek za Riccijev tenzor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(U_\mu,_\nu + U_\nu,_\mu - \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu},_{\lambda\sigma} - h,_{\mu\nu}) \tag{32}$$

Spomnimo se še substitucije $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ in zapišimo Einsteinov tenzor v linearnem približku:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma}\bar{h}_{\mu\nu},_{\lambda\sigma} - \bar{U}_\mu,_\nu - \bar{U}_\nu,_\mu + \eta_{\mu\nu}\bar{U}^\lambda,_\lambda) \tag{33}$$

Če primerjamo z enačbo 6.11 v skriptah ugotovimo, da bi se morale enačbe gravitacijskega polja zapisati v obliki:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\kappa T_{\mu\nu} \tag{34}$$

Zapomnimo si Einsteinove enačbe gravitacijskega polja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

[2] pri urejanju členov je pametno upoštevati simetričnost tenzorja $h$ in simetričnost parcialnega odvajanja po dveh indeksih in zapisati končen izraz v kar se da simetrični obliki