

# TEORIJA GRAVITACIJE

*Andrej Čadež*

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Newtonov zakon gibanja in njegove simetrije</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Galilejeve in Lorentzove transformacije</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Specialna relativnost</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Sile</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Umeritvena invariantnost gravitacijske teorije</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Enačbe gravitacijskega polja in napetostni tenzor</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Napetostni tenzor</b>	<b>43</b>
7.1	Napetostni tenzor idealnega plina . . . . .	43
7.2	Tenzor vrtilne količine . . . . .	52
7.3	Napetostni tenzor elektromagnetnega polja . . . . .	53
7.4	Napetostni tenzor gravitacijskega polja . . . . .	56
7.5	Gravitacijski valovi . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Gibanje planeta okrog sonca</b>	<b>66</b>
<b>9</b>	<b>Gibanje svetlobe v gravitacijskem polju sonca</b>	<b>75</b>
<b>10</b>	<b>Orodja geometrije v <math>n</math>-razsežnih prostorih</b>	<b>84</b>
10.1	Mnogoterosti v $n$ razsežnih prostorih . . . . .	85
10.2	Simplektične strukture in klinasti produkt . . . . .	88
10.3	$n$ -forme . . . . .	93
10.3.1	1-forme in vektorska polja . . . . .	99
10.3.2	2-forme . . . . .	104
10.3.3	O 3-formah . . . . .	110
10.4	Operacija zvezda . . . . .	110
10.5	Odvajanje . . . . .	112
10.6	Posplošeni Gaussov izrek . . . . .	115
10.7	Transformacijske grupe, Lie-jev odvod, kovariantni odvod itd. . . . .	116

12. junij 2007

# Uvod

Einsteinova splošna teorija relativnosti je klasična teorija gravitacijskega polja. Znana je po nekaterih svojih eksotičnih napovedih kot so črne luknje in gravitacijski valovi, ki jih še do danes nismo uspeli nedvoumno zaznati. Pravilnost te teorije zaenkrat potrjujejo le trije klasični testi izvedeni v Sončnem sistemu, kjer je gravitacija v njej lastnih enotah izjemno šibka in temu primerno se tudi pojavi, ki jih napoveduje Einsteinova teorija, le zelo, zelo malo razlikujejo od napovedi preprostejše Newtonove teorije gravitacije. Lepota in pomen Einsteinove teorije gravitacije ni, po mojem mnenju, v eksotičnih pojavih ali v točnih napovedih majčkenih sprememb v Sončnem sistemu, ampak v njeni eleganci in v vplivu, ki ga je imela in še ima za razumevanje osnov fizikalnega razumevanja prostora in časa. Fizikalna slika in metode te teorije so spremenile celotno sodobno teoretično fiziko. Vse teorije polja, tako klasične kot kvantne morajo ustrezati tistim načelom, ki so prvič jasno postavljena v splošni relativnostni teoriji.

Kot vse dobre teorije je tudi splošna relativnost živ organizem, ki mu raziskovalci še vedno dodajajo nove poglede, zglede in izpeljave. Zato se je razvilo tudi nekaj poti po katerih je vredno hoditi na poti v splošno relativnost. Po glavnih razglednih točkah bi razvrstil te poti med klasične, katerih glavni povdarek je princip ekvivalence in smatrajo teorijo gravitacije za edino kanonično geometrijsko teorijo prostora-časa. Druga vrsta poti pa predvsem povdarja simetrijske lastnosti gravitacije in njeno podobnost z drugimi polji, ki jih prav tako opišemo z umeritvenimi teorijami polja. Sam sem prvič spoznal gravitacijo po prvi poti. Res je lepa in po vseh naporih, ki jih je treba premagati, se zdi še lepša. Tisto, kar je pri njej impresivno je to, da izgleda, kot da ni prav nobene (ali pa skoraj nobene) druge možnosti za opis gravitacije. Vendar je ta pot precej naporna. Dolgo se vije po samotnih soteskah in pušča popotnika samemu sebi; ne daje mu kaj prida zgledov, ki bi mu lajšali pot. Večkrat je treba mimo nevarnih čeri v obliki matematičnih singularnosti, ki niso vedno to, za kar se kažejo. Šele na koncu se odpre čudoviti razgled, ki je značilen za visoke vrhove.

Drugo pot sta prva prehodila Weinberg in Salam. Proslavila sta se s poenotenjem teorije elektromagnetnega polja in šibke sile. Zanimala ju je struktura teorij polja, predvsem to, kako različna polja sodelujejo med seboj. Pri tem sta Weinberg in Salam, pa tudi že drugi pred njima, naleteli na simetrijska pravila, ki jim mora ustrezati vsaka teorija polja - tudi gravitacija. Weinberg je tako napisal učbenik *Gravitation and Space-Time* v katerem pride do gravitacijskih enačb po splošnih pravilih, ki veljajo za vsako teorijo polja. Ta pot do teorije gravitacije je zložnejša od prve. Na njej lahko srečamo več zgledov in več podobnosti z drugo znano teorijo polja

- elektromagnetno teorijo. Zato se je moč na tej poti večkrat ustaviti in preverjati razumevanje na znanih zgledih.

Tale kratek zapis se naslanja bolj na drugo pot, vendar zaradi kratkosti ne bomo zmogli vseh zgledov in pregledati vseh paralel z elektromagnetno teorijo, ki bi jih bilo vredno in potrebno za polno delavno razumevanje teorije gravitacije. Zato se bomo včasih naslanjali tudi na nekatere Einsteinove premisleke, ki so se v zadnjih osemdesetih letih vendarle intuitivno vsidrali v našo zavest.

## 1 Newtonov zakon gibanja in njegove simetrije

Newtonov zakon gibanja smo navajeni videti v obliki:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{A.1})$$

Z besedami pa ga lahko povemo tudi takole: Telo, na katerega ne deluje nobena sila, se giblje premo in enakomerno. Če se telo ne giblje premo in enakomerno, potem nanj deluje sila, ki je sorazmerna pospešku tega telesa in njegovi masi. Povdarek v besedni formulaciji je na tem, da je prostor čudovito simetričen, to je, da lahko v njem vpeljemo koordinatne sisteme, ki imajo lastnost, da koordinate teles, ki prosto padajo, v vseh koordinatnih sistemih enakomerno naraščajo. Newtonov zakon je zato vredno zapisati v tisti matematični formulaciji, ki najbolj slikovito odraža simetrijo prostora. Lagranževa formulacija enačb gibanja temu namenu bolje ustreza od Newtonove. V Lagranževi formulaciji zapišemo enačbe gibanja sistema  $N$  delcev na katere in med katerimi delujejo samo sile, ki jih je mogoče izraziti kot gradiente potenciala ali sile holonomnih vezi, kot Euler Lagranževe enačbe, ki sledijo iz Lagranževe funkcije sistema  $N$  delcev. Pri tem je Lagranževa funkcija sistema delcev zapisana kot vsota kinetičnih energij vseh delcev (glede na nek inercialni sistem), od nje pa odštejemo potencialno energijo vseh sil med delci. Torej:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (\text{A.2})$$

Euler Lagranževe enačbe, to je enačbe gibanja, pa so:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad (\text{A.3})$$

**Naloga A.1:** Pokaži, da so enačbe (A.3) istovetne enačbam (A.1), če je sila na  $i$ -ti delec  $\vec{F}_i = -\partial V / \partial \vec{r}_i$ .

Še ena pomembna lastnost enačb (A.3) je ta, da jih lahko izpeljemo iz zelo preprostega Hamiltonovega principa, ki pravi: Če vem, da so ob času  $t_1$  delci sistema v točkah  $\vec{r}_i(t_1) = \vec{R}_{1i}$  in ob času  $t_2$  v točkah  $\vec{r}_i(t_2) = \vec{R}_{2i}$ , potem se v vmesnem času  $t$  ( $t_1 < t < t_2$ ) gibljejo po tisti od vseh možnih poti  $\vec{r}_i(t)$ , za katero zavzame akcija  $S$  najmanjšo vrednost, pri čemer je akcija:

$$S[\vec{r}_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) dt \quad . \quad (\text{A.4})$$

Pri tem smatramo akcijo kot funkcional funkcij  $\vec{r}_i(t)$ . To je, akcija je številka katere vrednost je odvisna od tega katere funkcije izberem za  $\vec{r}_i(t)$ .

Vrnimo se na sam samcati delec na katerega ne deluje nobena sila. Lagranževa funkcija za ta delec je preprosto:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (\text{A.5})$$

V oči pade zelo preprosto dejstvo; ker je Lagranževa funkcija enaka kinetični energiji delca, je konstantna vzdolž trajektorije, oziroma  $dL/dt = 0$ . Za take Lagranževe funkcije, ki so konstantne vzdolž poti delca, lahko pokažemo: Če je  $L$  Lagranževa funkcija, ki da prave enačbe gibanja, potem da  $L' = f(L)$  iste enačbe gibanja, pri čemer je  $f(L)$  poljubna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija  $L$ . Torej je  $L'$  popolnoma enakovreden  $L$ -u kot generator enačb gibanja.

**Naloga A.2:** Dokaži to trditev.

Če izberemo  $f(L) = (\frac{2}{m}L)^{\frac{1}{2}}$ , dobimo  $L' = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$  in akcijo lahko zapišemo kot:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (\text{A.6})$$

Vidimo, da je  $S$  lahko tudi dolžina poti med točkama  $\vec{R}_1$  in  $\vec{R}_2$ . Hamiltonov princip, ki opisuje gibanje prostega delca med dvema točkama v prostoru lahko izrazimo tudi z besedami: prosti delec opiše najkrajšo možno pot med dvema točkama. Ta oblika zakona gibanja najbolj nazorno kaže povezavo med geometrijo in dinamiko: Dinamika prostih delcev opisuje najkrajše možne poti med dvema točkama. V Evklidskem prostoru so take poti (slučajno ?) deli premic.

## 2 Galilejeve in Lorentzove transformacije

Videli smo, da Newtonov zakon dinamike pove, kako moramo v kartezičnih koordinatah zapisati razdaljo med dvema točkama v prostoru. Kaj pa simetrije prostora o katerih je bilo govora v uvodu? Simetrijske operacije so tiste operacije, ki ohranjajo neko lastnost. Npr. ena od pomembnih lastnosti evklidskega prostora je ta, da imajo vsi trikotniki v prostoru enako vsoto notranjih kotov to je  $\pi$ , ne glede na njihovo orientacijo ali ploščino. Do tega aksioma smo prišli na osnovi mehanike, saj trikotnike definira dinamika; konstruiramo jih tako, da z daljicami, to je s krivuljami po katerih se gibljejo prosti delci, tri točke povežemo v lik. V kartezičnih koordinatah je simetrijo najlažje zapisati, saj se samo v teh koordinatah enačbe premic zapišejo tako, da so vse tri koordinate linearne funkcije nekega parametra npr. časa. Omenjena simetrija evklidskega prostora mora torej pomeniti, da se morajo enačbe gibanja prostih delcev (ki povedo kako narišemo premice) zapisati enako ne glede na to, v kateri točki prostora izberemo začetek koordinatnega sistema ali v katere smeri neba orientiramo njegove osi. Še več, v vseh koordinatnih sistemih, ki se med seboj razlikujejo le po tem, da se med seboj enakomerno gibljejo, morajo imeti enačbe za gibanje prostih delcev enako obliko, saj se enakomerno gibanje vidi tako v vseh koordinatnih sistemih, le hitrost gibanja je glede na različne inercialne sisteme različna. Vzemimo dva taka inercialna sistema  $S$  in  $S'$ . Naj bodo kartezične koordinate točke  $\varphi$  v sistemu  $S$   $\{x, y, z\}$ , v koordinatnem sistemu  $S'$  pa  $\{x', y', z'\}$ . Skupaj z Galileo Galileijem smo pričakovali, da se enačbe gibanja zapišejo enako v  $S$  in  $S'$ , če so koordinate točke  $\varphi$  v obeh sistemih povezane z Galilejevo transformacijo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x' + R_{12}y' + R_{13}z' + v_x t + x_0 \\ R_{21}x' + R_{22}y' + R_{23}z' + v_y t + y_0 \\ R_{31}x' + R_{32}y' + R_{33}z' + v_z t + z_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Pri tem so  $R_{ik}$  (konstantne) komponente ortogonalne matrike, ki zavrti koordinatni sistem in ima zato lastnost  $R\tilde{R} = I$  - matrika  $R$  pomnožena s transponirano matriko ( $\tilde{R}$ ) da enotsko matriko ( $I$ ).

Če naj vidita opazovalca v sistemu  $S$  in v  $S'$  enake enačbe gibanja za prosti delec, morata biti Lagranževi funkciji za prosti delec v obeh sistemih enaki ali vsaj ekvivalentni. Vstavimo (B.1) v (A.5) in dobimo Lagranževo funkcijo (kinetično energijo v tem primeru) za delec v sistemu  $S$  izraženo s koordinatami v  $S'$ . Tako dobimo:

$$\begin{aligned} L(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', x', y', z') &= \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + \\ &+ m(v_x R_{11}\dot{x}' + v_x R_{12}\dot{y}' + v_x R_{13}\dot{z}' + \dots + v_z R_{33}\dot{z}') + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Na prvi pogled izgleda kot bi se (A.5) in (B.2) razlikovala, pa temu pravzaprav ni tako. Lagranževa funkcija (A.5) in (B.2) se razlikujeta za  $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  ter za člene tipa  $v_i R_{i,k} \dot{x}_k$ , pri čemer lahko zavzameta indeksa  $i$  in  $k$  vrednosti od 1 do 3 in pomeni 1 indeks za spremenljivko  $x$ , 2 za  $y$  in 3 za  $z$ . Prvi člen lahko črtamo iz Lagranževe funkcije, saj dobimo enačbe gibanja iz Lagranževe funkcije vedno z odvajanjem, zato dodatek konstante Lagranževi funkciji v smislu generatorja enačb gibanja ne spremeni. Tudi zadnji omenjeni člen lahko izpustimo s pojasnilom, da ne spremeni enačb gibanja, saj nastopajo v njem komponente hitrosti delca ( $\dot{x}_i$ ) samo v prvi potenci; ko v Euler Lagranževih enačbah po njih odvajamo, ostanejo konstante, ki izginejo, ko jih odvajamo po času (glej (A.3)). Torej sta Lagranževi funkciji (B.2) in (A.5) vendarle povsem ekvivalentni. Po trditvi iz naloge A.2 pa se zapiše tudi Lagranževo funkcijo (A.6) v  $S'$  prav tako kot v  $S$ , torej

$$L' = \sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2}$$

**Naloga B.1:** Pokaži, da da  $L'$  iste enačbe gibanja kot  $L$ , pri čemer je  $L$  Lagranževa funkcija poljubnega mehanskega sistema, če se  $L$  in  $L'$  razlikujeta samo za izraz, ki je totalni (substancijalni) odvod funkcije koordinat ( $\vec{r}_i$ ). Opomba: Dokaz je mogoče najti v večini knjig iz analitične mehanike ob diskusiji Hamiltonovega variacijskega principa.

Pokazali smo, da je v Newtonovi mehaniki Lagranževa funkcija prostega delca invariantna glede na Galilejeve transformacije.

**Naloga B.2:** Pokaži, da velja to tudi za Lagranževo funkcijo sistema delcev na katere delujejo samo medsebojne potencialne sile, kar zapišemo, da je potencial samo funkcija relativnih koordinat parov delcev  $V = \sum_{i,j;i \neq j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

Galilejeva invariantnost se je zdela očitna vse do konca prejšnjega stoletja zato, ker smo živeli z Evklidsko geometrijo dva tisoč let in zato, ker je hitrost svetlobe, največja znana hitrost, tako zelo velika, da ljudem ni padlo na pamet, da ni tako enostavno sinhronizirati ur v različnih inercialnih sistemih na različno oddaljenih točkah. Matematiki kot Gauss, Lobačevski, Bolyai kasneje pa Riemann in Weyl so se zavedali, da aksiomi evklidske geometrije niso vsi potrebni za matematično konstrukcijo konsistentne geometrije. Gauss je menda celo na skrivaj meril vsoto kotov velikega trikotnika, ki so mu bila oglišča trije označeni vrhovi gričev, da bi ugotovil,



če je njihova vsota res  $180^\circ$ . Ugotovil je, da se merski rezultat ujema z Evklidovo napovedjo, zato je na koncu verjel, da je evklidska geometrija, čeprav neobvezna po matematičnih pravilih, zaradi posebej visoke simetrije izbrana od Narave.

Prvi dvomi v invariantnost naravnih zakonov glede na Galilejeve transformacije so se začeli kazati koncem prejšnjega stoletja, ko je bila na pohodu Maxwellova elektromagnetna teorija in ko se je pokazalo, da Maxwellove enačbe niso invariantne glede na Galilejeve transformacije.

Zapišimo Maxwellove enačbe:

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} & b) \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ c) \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & d) \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Za nas bolj zanimivo obliko teh enačb dobimo, če vpeljemo vektorski potencial  $\vec{A}$  in skalarni potencial  $\phi$  tako, da je:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{in} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{B.4})$$

S tako definicijo potencialov sta enačbi (B.3b) in (B.3c) identično izpolnjeni, enačbi (B.3a) in (B.3d) pa dasta:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\frac{1}{c^2} \left( \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) + \mu_0 \vec{j}$$

in

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Uporabimo še vektorsko identiteto  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$  in preuredimo člene pa dobimo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Končno opazimo še tole: če dasta potenciala  $\vec{A}$  in  $\phi$  polji  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$ , potem dasta potenciala:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

in

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

natančno isti vektorski polji  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  za vsak  $\psi$ , ki je zvezno odvedljiva funkcija  $\vec{r}$  in  $t$ . Ker sta to edini merljivi količini, sklepamo, da sta potenciala  $\vec{A}$  in  $\phi$  nedoločena do umeritvenega polja  $\psi$ . Temu dejstvu pravimo umeritvena invariantnost elektromagnetne teorije (po angleško gauge invariance). Umeritvena invariantnost omogoča, da lahko izberemo polji  $\vec{A}$  in  $\phi$  tako, da ustrezata še enemu dodatnemu skalarnemu pogoju. Zelo ugodno je izbrati pogoj:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.7})$$

**Naloga B.3:** Naj bosta  $\vec{A}$  in  $\phi$  vektorski in skalarni potencial, ki dasta električno in magnetno polje  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$ , pri tem pa naj bo  $\nabla \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \chi(\vec{r}, t)$ . Pokaži, da je mogoče najti v skladu z (B.6) taki polji  $\vec{A}'$  in  $\phi'$ , da je za njiju izpolnjena enačba (B.7) pri tem, da dasta  $\vec{A}'$  in  $\phi'$  originalni polji  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$ .

V umeritvi, ki ustreza pogoju (B.7), so enačbe polja res preproste:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{B.9})$$

Ni težko pokazati, da so enačbe (B.7) in pogoj (B.6) invariantne glede na uje hitrosti (oz. če tisti del Galilejevih transformacij (B.1), ki ne vseb velja  $v_x = v_y = v_z = 0$ ), če pa transformacija (B.1) vsebuje hitrost, elektromagnetne enačbe niso več invariantne. Do tega spoznanja so prišli koncem prejšnjega stoletja in velika uganka je bila kaj gre narobe. Lorentz in Poincare sta ugotovila, da so elektromagnetne enačbe invariantne glede na transformacije, ki jih danes imenujemo Lorentzove transformacije, grupo, ki jo te transformacije tvorijo, pa imenujemo Poincarejevo grupo. Galilejeve transformacije tvorijo Galilejevo grupo, ki ima podgrupe translacijsko grupo  $\{x_0, y_0, z_0\}$ , rotacijsko grupo  $R$  in grupo potiskov (po angleško boost). Poincarejeva grupa ima prav tako translacijsko podgrupo, rotacijsko podgrupo in podgrupo potiskov, pri čemer pa je realizacija podgrupe potiskov v Lorentzovih transformacijah drugačna od tiste v Galilejevi grupi.

Preden zapišemo Lorentzove transformacije, je vredno vpeljati notacijo, ki je v relativnostni teoriji pa tudi na drugih področjih teoretične fizike danes standardna. Četverico koordinat "dogodka"  $\varphi \{ct, x, y, z\}$  bomo označevali z  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  zato, da lahko splošno označimo katerokoli od štirih koordinat s splošnim indeksom npr.  $\mu$  (Če je npr.  $\mu = 0$  govorimo o  $ct$  ali če je  $\mu = 2$  govorimo o  $y$ ). Tako je npr.  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$  ena od komponent gradienta funkcije  $\phi$ , oziroma če teče  $\mu$  od 0 do 3 pomeni, da imamo v mislih implicitno kar gradient funkcije  $\phi$  v koordinatni bazi  $\{ct, x, y, z\}$ . Vpeljimo še matriko Minkowskega s komponentami  $\eta^{\mu\nu}$  ( $\mu$  in  $\nu$  sta med 0 in 3) tako, da je  $\eta^{00} = -1$ ,  $\eta^{ii} = 1$  za  $i = 1, 2, 3$ , vse ostale komponente pa so enake 0. Matrika  $\eta$  je tako neke vrste ekvivalenta Kronekerjevega  $\delta$  ( $\delta_{ik} = 1$  če  $i = k$  in  $\delta_{ik} = 0$  če  $i \neq k$ ) s tem, da je za razliko od  $\delta_{ik}$ , kjer so vse od nič različne komponente enake +1, pri  $\eta^{\mu\nu}$  vrednost komponente  $\eta^{00}$  enaka  $-1$ . To matriko vpeljemo na ta način zato, da lahko zapišemo enačbe tipa (B.8), (B.9), v kompaktni obliki; npr. za (B.9) zapišemo:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ali še krajše:

$$\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{B.10})$$

V zgornji vrstici smo nakazali dva dogovora; če se grški indeks v produktu ponovi tako, da nastopa enkrat zgoraj in enkrat spodaj potem nimamo v mislih samo zapisanega indeksa npr. z imenom  $\mu$ , ampak smatramo, da gre za tekoči indeks to je indeks po katerem seštevamo, ko teče od 0 do 3. Npr.:

$$V^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv V^0 \frac{\partial \phi}{c \partial t} + V^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + V^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + V^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{B.11})$$

Drugi običajni dogovor je ta, da označimo parcialne odvode funkcij po koordinatah  $x^0 \dots x^3$  s:

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad \text{in} \quad \phi_{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad \text{itd.} \quad (\text{B.12})$$

**Naloga B.4:** Izpiši enačbo (B.10) z upoštevanjem dogovorov (B.11) in (B.12) in se prepričaj, da dobiš enačbo (B.9).

Končno se vrnemo k transformacijam potiska. Vzemimo najprej Galilejeve transformacije (B.1) in pogledjmo v kaj transformirajo enačbo (B.9) oziroma obliko (B.10) V novi pisavi zapišemo transformacije (B.1) v obliki:

$$x^\mu = R^\mu_{\nu} x'^\nu + X_0^\mu \quad (\text{B.13})$$

Komponente  $R^\mu_\nu$  matrice  $\mathbf{R}$  imajo za Galilejeve transformacije naslednje vrednosti:  $R^0_0 = 1$  in  $R^0_i = 0$  za  $i = 1, 2, 3$ , ker je pa Galileju in po Newtonu čas količina, ki teče v vseh sistemih z enako hitrostjo. Krajevne komponente matrice  $\mathbf{R}$ ;  $R^i_k$  za  $i = 1, 2, 3$  tvorijo rotacijsko matriko iz (B.1) in  $R^i_0 = v^i/c \equiv \beta^i$  za  $i = 1, 2, 3$ . Za Galilejeve transformacije se torej matrika  $\mathbf{R}$  glasi:

$$\mathbf{R}^G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^x & R^x_x & R^x_y & R^x_z \\ \beta^y & R^y_x & R^y_y & R^y_z \\ \beta^z & R^z_x & R^z_y & R^z_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

(Vstavi (B.14) v (B.13) in se prepričaj, da dobiš (B.1).) Če torej upoštevamo, da zapišemo stare koordinate  $x^\mu$  z novimi  $x'^\mu$  kot zahteva linearna transformacija (B.13), vidimo, da se gradient funkcije  $\phi$  v novih koordinatah zapiše:

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \equiv \phi_{,\nu'} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.15})$$

Ali z besedami: komponente gradienta v starem koordinatnem sistemu ( $\phi_{,\mu}$ ) dobimo iz novih tako, da pomnožimo vrstično matriko novih komponent ( $\phi_{,\nu'}$ ) z matriko  $\mathbf{M}$  ki ima komponente:

$$M^\lambda_\mu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}. \quad (\text{B.16})$$

Napišimo to še v matrični pisavi:

$$(\phi_{,0}, \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3}) = (\phi_{,0'}, \phi_{,1'}, \phi_{,2'}, \phi_{,3'}) \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

**Naloga B.5:** Primerjaj zapisa (B.15) in (B.17) in se prepričaj, da dasta isti rezultat, če spoštujemo dogovora (B.11) in (B.12) in seveda pravilo za množenje matrik. Prepričaj se tudi, da je matrika  $\mathbf{M}$  inverzna matriki  $\mathbf{R}$ , to je

$$R^\mu_\lambda M^\lambda_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (\text{B.18})$$

Pri tem je  $\delta^\mu_\nu = 1$  če  $\mu = \nu$  in  $\delta^\mu_\nu = 0$  drugače, to je Kronekerjev delta, oziroma matrika s komponentami  $\delta^\mu_\nu$  je enotska matrika. (Glej (B.13) in (B.15)!)

V zvezi z uvedbo enotske matrike (s komponentami  $\delta^\mu_\nu$ ) je ugodno vpeljati še inverzno matriko k matriki s komponentami  $\eta^{\mu\nu}$ . Komponente inverzne matrike označimo z  $\eta_{\mu\nu}$  in velja:

$$\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (\text{B.19})$$

Seveda ima matrika  $\eta^{\mu\nu}$  natanko take vrednosti komponent kot  $\eta_{\mu\nu}$ . Vpeljati jo moramo zaradi reda pri sumacijskem dogovoru, ki zahteva, da seštevamo vedno samo po paru indeksov od katerih je eden vedno spodaj, drugi pa zgoraj.

Zapišimo matriko drugih odvodov  $\phi_{,\mu\nu}$  v novi koordinatni bazi ( $x'^\mu$ ):

$$\phi_{,\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\phi_{,\mu}) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \right] \equiv \phi_{,\sigma'\lambda'} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \phi_{,\lambda'} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (\text{B.20})$$

Drugi člen v zadnji enakosti je nič, ker je transformacija (B.13) linearna, zato bo bralec, ki je s pomočjo nalog obvladal indeksno pisavo, uvidel, da je pogoj za nespremenljivost oblike enačb tipa (B.8), (B.9) ta, da da produkt matrike odvodov ( $\mathbf{M}$ ) z matriko Minkovskega ( $\eta$ ) in ponovno s transponirano matriko odvodov ( $\tilde{\mathbf{M}}$ ) nazaj matriko Minkovskega ( $\eta$ ) ali v indeksni pisavi:

$$\eta^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \quad (\text{B.21})$$

Če upoštevamo rezultat naloge B.5 pomnožimo levo stran enačbe (B.21) z  $R^\omega_\mu R^\tau_\nu$  in dobimo tudi:

$$R^\omega_\mu \eta^{\mu\nu} R^\tau_\nu = \eta^{\omega\tau} \quad (\text{B.22})$$

Izpišimo produkt  $\mathbf{R}\eta\tilde{\mathbf{R}}$  za Galilejev potisk:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_x & 1 & 0 & 0 \\ \beta_y & 0 & 1 & 0 \\ \beta_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_x & -\beta_y & -\beta_z \\ -\beta_x & 1 - \beta_x\beta_x & -\beta_x\beta_y & -\beta_x\beta_z \\ -\beta_y & -\beta_y\beta_x & 1 - \beta_y\beta_y & -\beta_y\beta_z \\ -\beta_z & -\beta_z\beta_x & -\beta_z\beta_y & 1 - \beta_z\beta_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Odtod je razvidno, da Galilejeva transformacija potiska spremeni obliko valovne enačbe, če se preselimo v koordinatni sistem  $S'$ . Povedali pa smo že, da so enačbe tipa (B.10) invariantne glede na translacije in rotacije tako kot pri Galileju.

Poiskati hočemo transformacijo potiska, ki ohranja (B.10) oziroma zadošča (B.21). Če gre za potisk v smeri osi  $x$  uganemo, da ima ustrezna matrika obliko podobno Galilejevi s tem, da moramo dopustiti splošne vrednosti samo za elemente  $M^0_0, M^1_0, M^0_1$  in  $M^1_1$ , ostale diagonalne komponente imajo vrednost 1, izvendiagonalne pa vrednost 0. Enačbe (B.21) se v tem primeru reducirajo na tri pogoje med štirimi netrivialnimi elementi matrike  $M$ . Z nekoliko več truda pa je mogoče priti do Lorentzovega potiska, ki zadošča enačbi (B.21) in sicer dobimo:

$$\mathbf{R}^{\text{LP}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + \gamma^2\beta_x\beta_x/(\gamma+1) & \gamma^2\beta_x\beta_y/(\gamma+1) & \gamma^2\beta_x\beta_z/(\gamma+1) \\ \gamma\beta_y & \gamma^2\beta_y\beta_x/(\gamma+1) & 1 + \gamma^2\beta_y\beta_y/(\gamma+1) & \gamma^2\beta_y\beta_z/(\gamma+1) \\ \gamma\beta_z & \gamma^2\beta_z\beta_x/(\gamma+1) & \gamma^2\beta_z\beta_y/(\gamma+1) & 1 + \gamma^2\beta_z\beta_z/(\gamma+1) \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Zaradi krajše pisave smo v skladu z ustaljeno prakso definirali

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{B.25})$$

$\beta$  pa je seveda absolutna vrednost vektorja  $\vec{\beta}$  (običajnega vektorja v treh dimenzijah):  $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$ .

**Naloga B.6:** Zapiši (B.21) v matrični pisavi in pokaži z množenjem matrik, da velja  $\mathbf{R}^{\text{LP}}\eta\tilde{\mathbf{R}}^{\text{LP}} = \eta$ . Pokaži tudi, da je inverzna matrika matrike  $\mathbf{R}$  matrika, ki jo dobimo iz  $\mathbf{R}$  tako, da vektorju  $\vec{\beta}$  spremenimo znak.

**Naloga B.7:** Pokaži, da je tudi izraz:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.26})$$

invarianten glede na Lorentzove transformacije.

Matrika  $\mathbf{R}^{\text{LP}}$ , ki ustreza Lorentzovemu potisku, izgleda na prvi pogled precej drugače od ustrezne matrike za Galilejev potisk (prva matrika v (B.23)). V resnici pa je razlika zelo majhna, če upoštevamo, da so relativne hitrosti s katerimi imamo opravka v vsakdanjem življenju mnogo, mnogo manjše od hitrosti svetlobe; npr. hitrost reaktivnega letala je okrog  $300\text{m/s}$ , kar pomeni, da je vrednost  $\beta$  samo  $10^{-6}$ . Faktor  $\gamma$  je tedaj za vse praktične potrebe enak 1, produkti  $\beta_i\beta_j$  pa so tako majhni, da jih v primerjavi z 1 lahko brez skrbi zanemarimo. Edina razlika, ki še ostane je v tem, da predstavlja Galilejev potisk nesimetrična matrika, medtem ko imamo za Lorentzov

potisk simetrično matriko. Lorentz pravi, za razliko od Galileja, da se spremeni tudi časovna komponenta, če se preselimo v gibajoči koordinatni sistem. Ta lastnost Lorentzove transformacije je bila dolgo huda miselna ovira, ki jo je preskočil šele Einstein s svojo specialno teorijo relativnosti. Tudi ta zadnja razlika med Galilejem in Lorentzom je v normalnih pogojih komaj merljiva zato, ker je naša enota za čas sekunda, ki da pomnožena svetlobno hitrostjo razdaljo  $300.000 \text{ km}$ , kar je za naše pojme skoraj neznansko velika razdalja.

Na koncu prejšnjega stoletja je bilo torej znano, da je Maxwelllova elektromagnetna teorija invariantna glede na Lorentzove transformacije in zdelo se je, da je mehanika invariantna glede na Galilejeve transformacije. Fiziki so se v glavnem zavedali, da invariantnost teorije glede na transformacijsko grupo odraža simetrije prostora, zato se je zdelo nevzdržno, da bi narava razlikovala simetrijo prostora glede na elektromagnetizem in glede na mehaniko. Ena invariantnost je verjetno prava, druga pa samo približna, saj se v limiti majhnih hitrosti kažeta obe na enak način. Večini fizikov se je zdela Galilejeva invariantnost bolj naravna, zato so, da bi združili obe teoriji, privzeli, da obstaja univerzalno sredstvo, rekli so mu eter, ki določa fundamentalni inercialni sistem glede na katerega se zapišejo Maxwelllove enačbe tako kot v (B.3). Michelsonov poskus, ki je dokazal, da Zemlja gotovo miruje glede na eter, če obstaja, je bil zato presenečenje, saj se Zemlja giblje glede na bližnje zvezde z razmeroma veliko hitrostjo  $30 \text{ km/s}$ . Končno je Einstein v svoji specialni teoriji relativnosti pokazal, da je veliko lepše, če privzamemo, da so Lorentzove transformacije tiste, ki odražajo simetrije prostora, Galilejeve transformacije pa so samo njihov dober približek v limiti, ko so hitrosti veliko manjše od svetlobne.

### 3 Specialna relativnost

Specialna relativnost nadomesti Newtonovo dinamiko takrat, kadar imamo opravka z delci, ki se gibljejo s hitrostmi primerljivimi s svetlobno. Zgrajena je bila na osnovi podmene, da mora biti dinamika invariantna glede na Lorentzove transformacije. Enačbe gibanja za prosti delec je tudi v tej teoriji mogoče izpeljati iz variacijskega principa s tem, da mora biti akcija, oziroma Lagranževa funkcija invariantna glede na Lorentzove transformacije. Seveda pričakujemo, da bo pri majhnih hitrostih Lagranževa funkcija zelo podobna tisti v Newtonovi mehaniki.

Videli smo, da lahko v Newtonovi dinamiki zapišemo akcijo prostega delca na mnogo med seboj ekvivalentnih načinov. Ena najzanimivejših oblik je tista zapisana v (A.6). V njej nastopa čas eksplicitno kot parameter; namesto njega bi lahko vpeljali katerikoli drugi parameter, recimo mu npr.  $\sigma$ , ki narašča vzdolž orbite, saj lahko

(A.6) zapišemo tudi v obliki:

$$S_{NR} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \sqrt{\delta_{ik} dx^i dx^k} \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (\text{C.1})$$

Akcija v tej obliki najbolj nedvoumno izraža dejstvo, da so enačbe gibanja stvar geometrije prostora, v katerem se telo giblje. V tej obliki je tudi očitno, da se oblika akcije ne spremeni, če se preselimo v drug inercialni sistem z Galilejevo transformacijo (B.1), Lorentzove transformacije pa seveda spremene akcijo (A.6). Če pogledamo (C.1), (B.21) in (B.26), hitro uganemo kakšna mora biti akcija, da bo invariantna glede na Lorentzove transformacije:

$$S = \int_{x_1^\mu}^{x_2^\mu} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

Orbita prostega delca, to je rešitev enačb gibanja za prosti delec, so njegove koordinate kot funkcija poljubnega parametra, recimo mu  $\sigma$  ( $x^\mu(\sigma)$ ). Zato lahko zapišemo  $dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma$ , tako da je akcija:

$$S = \int_{x_1^\mu}^{x_2^\mu} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma \quad (\text{C.2})$$

Enačbe gibanja so ekvivalentne (A.3), oziroma v naši novi pisavi:

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\sigma}} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{C.3})$$

V Lagranževi funkciji iz (C.2) koordinate ( $x^\mu$ ) ne nastopajo eksplicitno ( $\partial L / \partial x^\mu = 0$ ), zato so ustrezni impulzi konstante gibanja. Enačbe gibanja (C.3) za  $L$  iz (C.2) se zato reducirajo na:

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\sigma}} = -\frac{1}{L} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \text{konst} \quad (\text{C.4})$$

Očitno je  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\sigma} = -L \eta^{\mu\nu} \pi_\nu$ , zato je:

$$L^2 \equiv -\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -L^2 \eta^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu \quad (\text{C.5})$$

Odtod sledi

$$\eta^{\mu\nu} \pi_\mu \pi_\nu = -1 \quad \text{ali} \quad = 0 \quad \text{če} \quad L = 0 \quad (\text{C.6})$$



Enačbe gibanja nam puste popolno svobodo pri izbiri funkcijske odvisnosti  $L(\sigma)$ , v vsakem primeru so njihove rešitve premo enakomerno gibanje:

$$v^i = c \frac{dx^i}{cdt} = c \frac{dx^i}{d\sigma} / \frac{dx^0}{d\sigma} = -c \frac{L\pi_i}{L\pi_0} = -c \frac{\pi_i}{\pi_0} \quad (\text{C.7})$$

$L$  v števcu se je pokrajšal z  $L$  v imenovalcu! (Utemelji znak ”-” za zadnjim enačajem!). Zato je vsekakor pametno izbrati  $L$  kot konstanto. Rešitve enačb gibanja (C.7) so v specialni relativnosti skoraj identične tistim v Newtonovi mehaniki, vendar z eno pomembno omejitvijo - zaradi (C.6) ne more biti nobena hitrost večja od svetlobne. Če imamo opravka samo z vsakdanjimi hitrostmi, te omejitve gotovo ne bomo opazili.

Dinamika prostega delca, ki smo jo obravnavali do sedaj, je bila zanimiva zato, ker nam je razkrila simetrije prostora - v svetu zelo majhnih hitrosti je to invariantnost glede na Galilejeve transformacije, v svetu tudi velikih hitrosti pa je to Poincarejeva invariantnost (invariantnost glede na Lorentzove transformacije). Seveda pa obstajajo v naravi sile, saj vsi delci niso prosti. Tudi v relativistični mehaniki se delec, na katerega deluje sila, giblje pospešeno. Sile zlomijo simetrijo Lagranževe funkcije prostega delca - Lagranževa funkcija ni več invariantna glede na transformacije  $L' = f(L)$  (Glej nalogo A.2). Izraz za gibalno količino  $\pi_\mu = \partial L / \partial \dot{x}^\mu$  namreč po transformaciji  $L' = f(L)$  v splošnem spremeni funkcionalno obliko, še posebej multiplikacijsko konstanto, ki v primeru prostega delca, ko ni sil ne spremeni gibalnih enačb. (Če zapišemo gibalno enačbo v obliki (A.1), oziroma  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , vidimo da lahko množimo  $\vec{p}$  s poljubno konstanto, če ni sile.) Relativistični izraz za gibalno količino lahko dobimo po naslednjem premisleku:

i) v limiti, ko gre hitrost proti nič se mora zapisati zveza med silo in pospeškom natanko tako kot v (A.1), saj se Galilejeva in Poincarejeva invariantnost razlikujeta samo za hitrosti, ki so primerljive s svetlobno.

ii) tudi v relativnosti velja zakon o vzajemnem učinku (če sodelujeta v trku delca ”1” in ”2” in če deluje delec ”1” na delec ”2” s silo  $F_{12}^\mu$ , potem deluje delec ”2” na delec ”1” s silo  $F_{21}^\mu$ , ki je nasprotno enaka sili  $F_{12}^\mu$ ; torej  $F_{12}^\mu = -F_{21}^\mu$ ), zato se mora ohranjati skupna gibalna količina sistema delcev, ki lahko med seboj trkajo, od zunaj pa na njih ne delujejo sile. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Zakaj se zahteva po ohranitvi celotne gibalne količine izoliranega sistema izraža tudi v specialni relativnosti si lahko predstavljamo tudi takole: Pričakujemo, da je mogoče opisati sistem  $N$  interagirajočih delcev z Lagranževo funkcijo, ki je funkcija koordinat in hitrosti vseh delcev ( $L = L(x_{(1)}^\mu, x_{(2)}^\mu, \dots, x_{(i)}^\mu, \dots, x_{(N)}^\mu, \dot{x}_{(1)}^\mu, \dot{x}_{(2)}^\mu, \dots, \dot{x}_{(i)}^\mu, \dots, \dot{x}_{(N)}^\mu)$ ). Enačbe gibanja za ta sistem delcev ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) so:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{(i)}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_{(i)}^\mu} = 0$$

Iz teh dveh zahtev je mogoče izpeljati, da se morajo komponente gibalne količine delca v specialni relativnosti zapisati kot komponente vektorja, ki ima v sistemu, glede na katerega delec miruje, komponente  $p_0 = -mc$  in  $p_x = p_y = p_z = 0$ . Po drugi strani pa mora biti vektor gibalne količine sorazmeren vektorju  $\pi_\mu$  iz enačbe (C.4), torej mora biti:

$$p_\mu = m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \quad \text{pri tem je} \quad \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2 \quad (\text{C.8})$$

Komponente vektorja  $p$  so torej odvisne od tega v katerem koordinatnem sistemu vektor opazujemo. Če delec miruje v sistemu  $S'$ , potem je glede na ta sistem  $\dot{x}'^i = 0$  in  $\dot{x}'^0 \equiv \frac{dx'^0}{d\sigma} \equiv \frac{dct'^0}{d\sigma} = c$ . (Pri tem smo izbrali za parameter  $\sigma$  (glej (C.2) in (C.3)) tako, da je za  $L$  iz (C.3)  $L^2 = c^2$ .) Parameter  $\sigma$  smo očitno izbrali tako, da raste z enako hitrostjo kot čas v sistemu glede na katerega delec miruje, zato imenujemo tako parametriziran  $\sigma$  lastni čas in ga od tu naprej temu primerno označimo s  $\tau$ . Vektor gibalne količine v lastnem sistemu očitno ustreza točki i) zgoraj. Komponente vektorja gibalne količine glede na sistem  $S$ , ki je povezan s sistemom  $S'$  s transformacijo (B.13), pa dobimo takole:

$$p_\mu = m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = m\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}\dot{x}'^\lambda = \eta_{\mu\nu}R^\nu{}_\lambda\eta^{\lambda\sigma}p'_\sigma \quad (\text{C.9})$$

Ker delci sodelujejo samo med sabo (sistem je izoliran), mora biti Lagranževa funkcija tega sistema invariantna glede na translacije celotnega sistema v prostoru, torej  $L(x_{(1)}^\mu + X^\mu \dots x_{(N)}^\mu + X^\mu, \dots, \dot{x}_i^\mu, \dots) = L(x_{(1)}^\mu \dots x_{(N)}^\mu, \dots, \dot{x}_i^\mu, \dots)$ , oziroma:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_{(i)}^\nu} = 0$$

Če uporabimo enačbe gibanja pa lahko zapišemo še:

$$\frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{(i)}^\mu} = 0$$

Oziroma, komponente vektorja:

$$P_\mu = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{(i)}^\mu}$$

so konstante gibanja. Če vzamemo, da je bil sistem v preteklosti razpršen in se bo v prihodnosti tudi razpršil, so bile v preteklosti in bodo v prihodnosti sile med delci zanemarljive. Tedaj je Lagranževa funkcija sistema vsota Lagranževih funkcij posameznih delcev, gibalna količina pa je zato vsota gibalnih količin vseh komponent. Normalizacija Lagranževe funkcije, ki diktira sorazmernostni faktor med gibalno količino in hitrostjo, pa je določena z nerelativistično limito. V poglavju o napetostnem tenzorju idealnega plina se bo bralec lahko prepričal, da normalizacija (C.8) za gibalno količino pelje do avtomatične ohranitve mase-energije.

Če je transformacijska matrika  $R$  (glej (B.13)) podana s potiskom (B.24), izrazimo komponente gibalne količine v obliki:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mc\gamma \\ mv_x\gamma \\ mv_y\gamma \\ mv_z\gamma \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Za fotone, ki se gibljejo s svetlobno hitrostjo je gibalna količina:

$$\underline{p}_\gamma = \begin{pmatrix} -E'/c \\ (E'/c)n'_x \\ (E'/c)n'_y \\ (E'/c)n'_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Pri tem tvorijo  $n'_x$ ,  $n'_y$  in  $n'_z$  komponente trirazsežnega enotskega vektorja  $\hat{n}'$ , ki kaže v smer razširjanja svetlobe,  $E'$  pa je energija fotona glede na inercialni sistem (recimo  $S'$ ) v katerem so zapisane komponente njegove gibalne količine.

Lagranževa funkcija za prosti delec, ki da pravilen izraz za gibalno količino tudi do sorazmernostne konstante je tako npr.:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}m[-c^2\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

V limiti majhnih hitrosti, ko je lastni čas delca ( $\tau$ ) kar enak koordinatnemu času, je  $\dot{t} = 1$  in gornja Lagranževa funkcija je do konstante, ki ne vpliva na enačbe gibanja, enaka nerelativistični (A.5).

**Naloga C.1:** Pokaži, da je Lagranževa funkcija

$$L = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \quad (\text{C.13})$$

ekvivalentna (C.12), ker da enake komponente gibalne količine.

**Naloga C.2:** Izračunaj komponente vektorja gibalne količine fotona glede na inercialni sistem  $S'$ . Kolikšna je energija fotona ( $E$ ) glede na sistem  $S$  (Dopplerjev pojav) in v katero smer kaže enotski vektor  $\hat{n}$  (aberracija svetlobe).

**Naloga C.3:** Comptonsko sipanje: Foton se siplje na mirujočem elektronu tako, da se giblje sipani foton pod kotom  $\theta'$  glede na vpadnega. Upoštevaj ohranitev vsote

gibalnih količin elektrona in fotona in izračunaj energijo sipanega fotona, kinetično energijo elektrona po sipanju in smer v katero se elektron odrine po sipanju (kot  $\Theta'$ ).

**Naloga C.4:** Jedro  $U^{238}$  je radioaktivno; razpade z razpadom  $\alpha$  v  $Th^{234}$ . Pri razpadu se sprosti  $4.17MeV$  energije. Naj jedro  $U^{238}$  pred razpadom miruje. Kolikšna je po razpadu kinetična energija jedra  $Th^{234}$  in kolikšna je kinetična energija delca  $\alpha$ ?

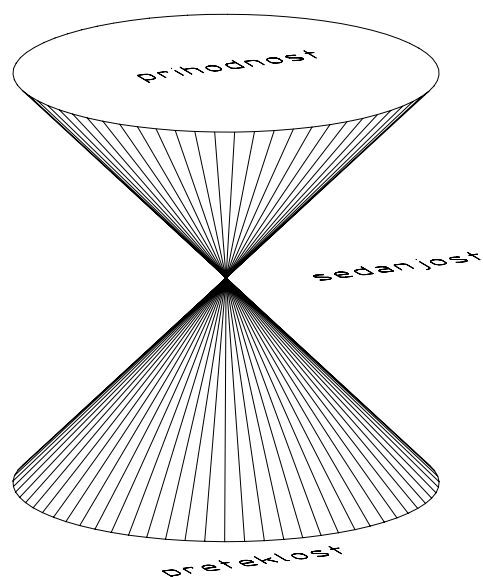
## 4 Sile

V prejšnjem poglavju smo se izognili izčrpnejši razpravi o silah v okviru specialne teorije relativnosti. Razlog pa je ta, da so sile še posebej pa polja sil, kot npr. električno in magnetno polje ali kakšna druga potencialna polja v specialni relativnosti bolj komplicirana kot v nerelativistični fiziki zato, ker mora potencialno polje zadoščati dodatnemu pogoju, ki ga v nerelativistični fiziki ni.

V specialni relativnosti je postal čas fizikalna količina, katere vrednost za določen dogodek je odvisna od tega v katerem inercialnem sistemu ga merimo. Vendar je možno na enoličen način urediti vse dogodke v prostoru na množico dogodkov v preteklosti, sedanjosti in prihodnosti izbranega dogodka. Naj bo izbrani dogodek  $\varphi$ . Dogodek  $\varphi'$  je v njegovi prihodnosti (preteklosti), če lahko najdemo tak Lorentzov potisk, da imata dogodka  $\varphi$  in  $\varphi'$  v novem inercialnem sistemu iste krajevne koordinate  $x^i$  (za  $i = 1, 2, 3$ ) in je  $x^{t0}[\varphi] > x^{t0}[\varphi']$  ( $x^{t0}[\varphi] < x^{t0}[\varphi']$ ). Dogodka  $\varphi$  in  $\varphi'$  pa sta v sedanjosti drug glede na drugega, če je mogoče najti tak Lorentzov potisk, da sta v novem inercialnem sistemu časovni koordinati za oba dogodka enaki. (Pokaži, da se pripadnost prihodnosti in sedanjosti izključujeta.) Na meji med prihodnostjo in sedanjostjo je trirazsežna mnogoterost, ki jo imenujemo prihodnji svetlobni stožec dogodka  $\varphi$ , na meji med preteklostjo in sedanjostjo pa je pretekli svetlobni stožec dogodka  $\varphi$ . (Glej sliko 1)

**Naloga D.1:** Dogodka  $\varphi$  in  $\varphi'$  imata v sistemu  $S$  koordinate  $ct, x, y, z$  in  $c\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ . V koordinatnem sistemu  $S'$  so koordinate teh dveh dogodkov  $ct', x', y', z'$  in  $c\hat{t}', \hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ . Naj bosta  $S$  in  $S'$  povezana z Lorentzovim potiskom (B.24) in naj bo:

- a)  $c^2(t - \hat{t})^2 - (x - \hat{x})^2 - (y - \hat{y})^2 - (z - \hat{z})^2 > 0$ . Poišči komponente tistega Lorentzovega potiska, ki transformira koordinate tako, da je  $x' = \hat{x}'$ ,  $y' = \hat{y}'$  in  $z' = \hat{z}'$ . Izrazi  $t' - \hat{t}'$  s koordinatami dogodkov  $\varphi$  in  $\varphi'$  v sistemu  $S$ .
- b)  $c^2(t - \hat{t})^2 - (x - \hat{x})^2 - (y - \hat{y})^2 - (z - \hat{z})^2 < 0$ . Poišči komponente tistega Lorentzovega potiska, ki potisne opazovalca v koordinatni sistem  $S'$  tako, da je za dogodka  $\varphi$  in  $\varphi'$   $t' = \hat{t}'$ . Izrazi oddaljenost dogodkov  $\Delta l = \sqrt{(x' - \hat{x}')^2 + (y' - \hat{y}')^2 + (z' - \hat{z}')^2}$



Slika 1:

s koordinatami obeh dogodkov v sistemu  $S$ .  
Komentiraj dobljene rezultate!

Komplikacija, ki jo pripelje specialna relativnost v pojem sile je v tem, da je sila vzrok za merljivo spremembo - spremembo gibalne količine. Če povzroči silo telo "1" na telo "2", je vzrok pri telesu "1", posledica pa je zaznavna pri telesu "2". Če bi bila vzrok in posledica (izvor sile in sprememba gibalne količine) na relaciji sedanost, bi lahko po povedanem vedno našli inercialni sistem v katerem bi bilo videti, da se je telo "2" odzvalo na silo telesa "1" takoj. Še več, lahko bi celo našli inercialni sistem v katerem bi bila posledica po času pred vzrokom. Za ilustracijo si lahko zamislimo tak poskus: Na razdalji  $r$  imamo na vzmeteh dva naboja, ki se privlačita. Če premaknemo prvi naboj, se je spremenilo polje okrog drugega naboja - spremenila se je sila na drugi naboj, kar zaznamo na ustrezni vzmeti. Če bi bil vzrok za spremembo sile, to je premik prvega naboja, v sedanosti posledici, to je premiku drugega naboja, bi lahko v nekaterih inercialnih sistemih opazili, da se drugi naboj sam od sebe premakne prej, preden smo prvega sunili. Takih pojavov v naravi ne opazimo, zato moramo sklepati, da leži posledica vedno v prihodnosti vzroka. Odtod sledi, da morejo prenašati sile samo polja, ki se razširjajo s hitrostjo manjšo ali enako svetlobni.

Poglejmo kako je sila na delec realizirana v klasični elektromagnetni teoriji! Krajevne komponente sile dobimo iz Lorentzovega izraza:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{D.1})$$

Ker je Lorentzova invariantnost elektromagnetne teorije bolj razvidna iz formulacije EM teorije z vektorskim in skalarnim potencialom, je vredno zapisati silo s potencialoma  $\vec{A}$  in  $\phi$  kot sta bila definirana v (B.4). Najprej zapišimo  $\vec{v} \times \vec{B}$  po komponentah:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} v_y A_{y,x} - v_y A_{x,y} - v_z A_{x,z} + v_z A_{z,x} \\ v_z A_{z,y} - v_z A_{y,z} - v_x A_{y,x} + v_x A_{x,y} \\ v_x A_{x,z} - v_x A_{z,x} - v_y A_{z,y} + v_y A_{y,z} \end{pmatrix} = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \quad (\text{D.2})$$

Resničnost zadnjega enačaja spoznamo na primer na komponenti  $x$  gornjega produkta, ki ga preuredimo v:

$$\begin{aligned} v_y A_{y,x} - v_y A_{x,y} - v_z A_{x,z} + v_z A_{z,x} &= v_y A_{y,x} + v_z A_{z,x} + v_x A_{x,x} - v_y A_{x,y} - v_z A_{x,z} - v_x A_{x,x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)A_x \end{aligned}$$

Tako lahko elektromagnetno silo zapišemo v obliki:

$$\vec{F} = e\left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A})\right]$$

ali

$$\vec{F} = e\left[\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A} - \phi) - \frac{d\vec{A}}{dt}\right] \quad (\text{D.3})$$

(Spomnimo se, da je  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \equiv (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ .) Kako posplošiti ta izraz, da bo zapisan v obliki, ki odraža 4-razsežnost specialne relativnosti? Najprej pogledajmo izraz  $e\vec{v} \cdot \vec{A} - e\phi$ , ki nastopa v okroglem oklepaju v (D.3). Komponente vektorja  $\vec{v}$  ( $dx^i/dt$ ) so v limiti majhnih hitrosti enake komponentam  $\dot{x}^i$ , to je krajevnim komponentam četverca hitrosti, vektorja, ki da pomnožen z maso, gibalno količino (glej (C.9)). V pisavi specialne relativnosti zapišemo produkt  $\vec{v} \cdot \vec{A}$  kot  $\eta_{ik}\dot{x}^i A^k$  pri čemer teče seštevanje po  $i$  in  $k$  samo od 1 do 3. Celoten okrogli oklepaj pa lahko zapišemo v limiti majhnih hitrosti kot  $\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu A^\nu$ , kjer tečeta  $\mu$  in  $\nu$  od 0 do 3, če vpeljemo  $A_0 = -\phi/c$  in upoštevamo, da je za majhne hitrosti  $dx^0/dt = c$ . Smiselnost take

identifikacije se pokaže še naprej, ko ugotovimo, da se umeritveni pogoj (B.7) z njo zapiše v obliki:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \eta^{\mu\nu} A_{\mu,\nu} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Umeritvene transformacije (B.6) se zapišejo v gradientni obliki:

$$A'_\mu = A_\mu + \psi_{,\mu} \quad (\text{D.5})$$

Enačbe (B.5) pa sugerirajo zapis:

$$\eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) = -\mu_0 j_\lambda \quad , \quad (\text{D.6})$$

oziroma:

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\mu_0 j_\lambda \quad , \quad (\text{D.7})$$

če je izpolnjen umeritveni pogoj (D.4). Zgoraj so krajevne komponente gostote toka  $j^i$  kar komponente vektorja  $\vec{j}$ , časovna komponenta  $j^0$  pa mora biti enaka:

$$j_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \mu_0 c} = -\rho c \quad (\text{D.8})$$

(Spomnimo se, da je  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ !)

**Naloga D.2:** Pokaži, da so enačbe (D.6) invariantne glede na umeritvene transformacije (D.5)!

**Naloga D.3:** Pokaži, da je po (D.6) divergenca gostote električnega toka identično enaka nič:

$$\eta^{\mu\nu} j_{\mu,\nu} = 0. \quad (\text{D.9})$$

Zapiši to enačbo v pisavi 3+1 (krajevne komponente+časovna komponenta) z upoštevanjem (D.8) in pokaži, da je to kontinuitetna enačba, ki zagotavlja ohranitev naboja.

Še ena identifikacija je možna; delcu z nabojem  $e$ , ki se giblje po trajektoriji  $x^\mu = \xi^\mu(\tau)$  s hitrostjo  $\vec{v}$  ( $v^i = d\xi^i/d\tau$ ) pripišemo v klasični elektrodinamiki tok  $\vec{I} = e\vec{v}$ . Po gornjem zgledu bomo torej pripisali v relativnosti gibajočemu se delcu tok s komponentami:

$$I_\mu = e\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad , \quad (\text{D.10})$$

gostoto tega toka pa lahko formalno zapišemo v obliki:

$$j_\mu(x^\lambda) = e \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\mu\nu} \dot{\xi}^\nu \delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau)) c d\tau \quad (\text{D.11})$$

**Naloga D.4:** V sistemu, kjer delec miruje, je  $\xi^0(\tau) = c\tau$  in  $\xi^i(\tau) = \text{konstantno}$ . Zapiši gostoto toka (D.11) in se prepričaj, da je to, kar si navajen.

**Naloga D.5:** Formalno izrazi divergenco gostote toka (D.11) in pokaži, da je identično enaka nič. Prepričaj se, da velja enako velja za gostoto masnega toka:

$$j_\mu^{(m)}(x^\lambda) = m \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\mu\nu} \dot{\xi}^\nu \delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau)) c d\tau, \quad (\text{D.12})$$

če je  $m$  ohranjena masa točkastega delca. (Namig:  $\dot{\xi}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{d}{d\tau}$ .)

Po gornjih identifikacijah uganemo kako je treba zapisati silo na delec v elektromagnetnem polju v specialni relativnosti:

$$F_\mu = e \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} \dot{x}^\lambda - e \frac{dA_\mu}{d\tau} = e \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \right\} (\dot{x}^\lambda A_\lambda) \quad (\text{D.13})$$

To silo res prenaša polje, ki se razširja s svetlobno hitrostjo, saj zadoščajo vse komponente vektorja  $A_\mu$  valovni enačbi (D.6).

Iz zadnjega izraza ni težko uganiti kakšen naj bo aditivni prispevek k Lagranževi funkciji prostega delca (C.12), da bodo Euler Lagranževe enačbe vsebovale tudi elektromagnetno silo:

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e \dot{x}^\mu A_\mu \quad (\text{D.14})$$

Sila (D.13) ima nadvse pomembno lastnost in sicer velja:

$$\dot{x}^\mu F_\mu = e \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} - e \dot{x}^\mu \frac{dA_\mu}{d\tau} = 0 \quad (\text{D.15})$$

Resničnost zadnje enakosti spoznamo, ko uvidimo, da je vektorski potencial le implicitno odvisen od lastnega časa  $\tau$  in je zato:

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \equiv A_{\mu,\lambda} \dot{x}^\lambda \quad (\text{D.16})$$

Iz (D.15) sledi, da je izraz  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  konstanta gibanja, kar pomeni, da meri lastni čas razdaljo med dogodki neodvisno od prisotnosti elektromagnetnega polja. Sklepamo



naprej: ker je prvi del Lagranževe funkcije (D.14) očitno invarianten glede na Lorentzove potiske, mora biti tudi drugi del  $\dot{x}^\mu A_\mu(x^\lambda)$ . To je tudi res, če se četverec hitrosti enako transformira kot četverec vektorskega potenciala in je  $\dot{x}^\mu A_\mu$  neke vrste skalarni produkt dveh vektorjev, ki se podobno kot v treh dimenzijah izraža s produktom dolžin vektorjev in kosinusom vmesnega kota, kar ni prav nič odvisno od koordinat. Kako se morajo spremeniti komponente vektorskega potenciala pri prehodu med koordinatnimi sistemi določajo enačbe (D.6) in (D.10). Če v vsem prostoru ni tokov, so enačbe (D.6) gotovo invariantne glede na vse Lorentzove transformacije, saj smo poiskali te transformacije kot tiste, ki ohranjajo obliko prav tovrstnih enačb. Na desni strani v izvorih enačb (D.6) pa stojijo komponente toka. Po (D.10) pa se komponente toka pri prehodu iz koordinatnega sistema  $S$  v  $S'$  transformirajo ravno tako z Lorentzovo matriko, kot smo videli npr. v (C.9). Zato se morajo tudi komponente vektorskega potenciala transformirati na enak način, to je:

$$A_\mu(\varphi) = \eta_{\mu\nu} R^\nu{}_\lambda \eta^{\lambda\sigma} A'_\sigma(\varphi) \equiv R_\mu{}^\sigma A'_\sigma(\varphi) \quad (\text{D.17})$$

Tehnična podrobnost: Pogosto se pojavljajo izrazi oblike  $\eta_{\mu\nu} S^{\dots\nu\dots}$ , zato je v veljavi dogovor, ki ga opravičuje (B.21), da z  $\eta_{\mu\nu}$  in z  $\eta^{\mu\nu}$  spuščamo in dvigujemo indekse v skladu s pravilom:

$$\eta_{\mu\nu} S^{\dots\nu\dots} = S^{\dots\mu\dots} \quad \text{in} \quad \eta^{\mu\nu} S_{\dots\nu\dots} = S_{\dots\mu\dots} \quad (\text{D.18})$$

To pravilo sem uporabil v (D.17).

Če naj bo Narava enotna, pričakujemo enakost relacij med vsemi naravnimi silami v vseh inercialnih sistemih. Zato zahtevamo od modelov za katerokoli silo narave invariantnost glede na lokalne Lorentzove transformacije.

Oboroženi s primerom elektromagnetne sile se lahko vprašamo, kako zapisati silo na delec v gravitacijskem polju. Pričakujemo, da bi lahko tudi za delec v gravitacijskem polju napisali Lagranževo funkcijo sestavljeno iz kinetičnega dela (C.12) in potencialnega dela, invariantnega glede na lokalne Lorentzove transformacije. Najbolj preprosta Lagranževa funkcija te vrste bi imela lahko morda, po analogiji z Newtonovo gravitacijo, obliko:

$$L = \frac{1}{2} m_I \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - m_g \Phi(x^\lambda) \quad (\text{D.19})$$

Pri tem smo vpeljali dve masi  $m_I$  in  $m_g$ , pri čemer je  $m_I$  tista masa, ki nastopa kot sorazmernostni faktor med silo in pospeškom,  $m_g$  pa tista masa, ki nastopa v Newtonovem gravitacijskem zakonu kot "masni naboj". Enačbe gibanja, ki sledijo iz take Lagranževe funkcije so po (C.3):

$$\eta_{\mu\nu} m_I \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = -m_g \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \quad (\text{D.20})$$

Če pomnožimo gornje enačbe z  $\dot{x}^\mu$  in seštejemo po  $\mu$  (dogovor o seštevanju), dobimo:

$$m_I \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \dot{x}^\mu = \frac{m_I}{2} \frac{d}{d\tau} (\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = -m_g \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu = -m_g \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (\text{D.21})$$

Odtod pa je razvidno, da je za Lagranžovo funkcijo (D.19) izraz  $H = \frac{m_I}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + m_g \Phi$  konstanta gibanja. Na prvi pogled se zdi taka konstanta gibanja smiselna, saj izgleda identična s konstantnostjo vsote kinetične in potencialne energije v gravitacijskem polju s potencialom  $\phi$ . Po globljem premisleku pa pridemo do naslednjega problema. Izraz  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  je Lorentzovo invarianten in ima vrednost  $-c^2$ , torej ni kinetična energija. Če naj bo izraz  $H$  konstanta gibanja, se mora spreminjati masa  $m_g$  vzdolž poti delca, ko se le-ta giblje skozi prostor v močnejšem ali šibkejšem gravitacijskem potencialu  $\Phi$ . Torej bi moral imeti delec v močnem gravitacijskem polju efektivno manjšo gravitacijsko maso kot isti delec izven polja. Tudi to je videti smiselno. Do problema pa pridemo, ko sežemo še malo naprej. Ključni poskus, ki ga je najprej naredil madžarski fizik baron Eötvös, ponovila in pomembno sta izboljšala njegovo natančnost še Dicke in nazadnje Braginsky je namreč pokazal, da sta gravitacijska in inercialna masa ( $m_g$  in  $m_I$ ) za vse snovi v enakem razmerju; ker je interakcija gravitacijskih mas opisana še sorazmernostnim koeficientom - gravitacijsko konstanto, smemo reči, da sta gravitacijska in vztrajnostna masa enaki. V skladu s tem poskusom moramo v Newtonovem približku pisati  $\Phi \approx -G \frac{m}{r}$ , pri čemer je  $m$  vedno ista masa ne glede na to ali se  $m$  nahaja v kakšnem zunanem polju ali ne. Tega pa nam gornji nastavek ne daje. Zato moramo sklepati, da Lagranževa funkcija (D.19) ne da konsistentnih gibalnih enačb za delec v gravitacijskem polju. Sklepamo, da skalarni potencial  $\Phi$  ni dovolj za opis gravitacijskega polja.

Ali je treba gravitacijsko polje opisati z vektorskim potencialom? Najpreprostejšo obliko Lagranževe funkcije za delec, ki se giblje v potencialu vektorskega polja, smo že izkoristili v (D.14) pri elektromagneni teoriji. Pokazati se da (vendar to nikakor ni enostavno), da pripeljejo vse Lagranževe funkcije, ki bi jih konstruirali na osnovi privzetka, da opišemo silo z vektorskim poljem in so seveda invariantni glede na lokalne Lorentzove transformacije, do sil, ki so povsem ekvivalentne elektromagnetnim silam. Gravitacijska sila pa je vendarle drugačna. Zato je smiselno poskusiti s privzetkom, da ima gravitacijsko polje tenzorski značaj - gravitacijske potenciale razvrstimo v komponente simetričnega tenzorja  $h_{\mu\nu}$ . Po elektromagnetnem vzgledu poskusimo z nastavkom:

$$L = \frac{m}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{m}{2} h_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (\text{D.22})$$

Upoštevali smo rezultat principa ekvivalence in smo "masni naboj" v drugem členu (pri  $h_{\mu\nu}$ ) izenačili z vztrajnostno maso  $m$ , ki nastopa pri "kinetičnem" členu. Gornji

izraz je invarianten glede na lokalne Lorentzove transformacije, če se komponente tenzorja  $h_{\mu\nu}$  pri prehodu v inercialni sistem transformirajo v:

$$h_{\mu\nu}(\varphi) = R_{\mu}^{\lambda} R_{\nu}^{\sigma} h'_{\lambda\sigma}(\varphi) \quad (\text{D.23})$$

Matematik bi rekel, da je gornji izraz invarianten glede na lokalne Lorentzove transformacije, če se komponente  $h_{\mu\nu}$  obnašajo kot komponente tenzorja v vektorskem prostoru z metriko, ki jo je mogoče napisati v komponentah z  $\eta_{\mu\nu}$ .

**Naloga D.6:** Primerjaj gornje transformacijsko pravilo s (D.17) in pokaži, da je Lagranževa funkcija (D.22) invariantna glede na lokalne Lorentzove transformacije!

Enačbe gibanja dobimo zopet tako, da vstavimo Lagranžev funkcijo (D.22) v (C.3). Rezultat je:

$$m(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\ddot{x}^{\nu} + mh_{\mu\nu,\lambda}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\lambda} - \frac{1}{2}mh_{\lambda\sigma,\mu}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma} = 0 \quad (\text{D.24})$$

Z malo aritmetike in potrpljenja je mogoče pokazati, da je glede na enačbe gibanja (D.24) Lagranževa funkcija (D.22) konstanta gibanja. Torej je po izreku iz naloge A.2 poljubna funkcija Lagranževe funkcije (D.22) ekvivalentna (D.22). V splošni relativnosti se ponavadi uporablja oblika  $L \rightarrow \sqrt{-2mL}$  in Lagranžev funkcijo za delec v gravitacijskem polju zapišemo v obliki:

$$L^g = m\sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}} \quad (\text{D.25})$$

**Naloga D.7:** Preveri, da je (D.24) res enačba gibanja za Lagranžev funkcijo (D.22) in pokaži, da se vrednost Lagranžev funkcije ohranja vzdolž poti delca (izračunaj  $dL/d\tau$  in namesto  $\ddot{x}^{\mu}$  vstavi pospešek izračunan po (D.24)).

Zanimivost Lagranžev funkcije za delec v gravitacijskem polju v obliki (D.25) je v tem, da se zapiše ustrezna akcija kot:

$$S/m = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu}} \quad (\text{D.26})$$

To akcijo lahko razumemo kot neke vrsto razdalje v prostoru, kot smo razumeli (A.6), oziroma kot je mogoče razumeti (C.2) s tem, da lahko s to razdaljo povezujemo samo točke, ki so časovno razmaknjene ali pa samo točke, ki so krajevno razmaknjene če zamenjamo znak pod korenem. Če sta (D.22), oziroma (D.25) pravi Lagranževi funkciji za delec v gravitacijskem polju, potem lahko razumemo teorijo gravitacije

kot metrično teorijo, saj vpelje gravitacijsko silo samo na ta način, da spremeni metriko v prostoru. To je, razdalja med točkami v prostoru, kot med dogodki v času je lahko drugačna od tiste, ki jo pričakujemo po klasični evklidski geometriji in le kadar je drugačna je v resnici prisotno gravitacijsko polje.

Z Lagranžovo funkcijo (D.22) ali (D.25) smo dobili dobrega kandidata za opis gravitacijske sile. To je ekvivalent enačbe (D.14) za elektromagnetno silo. Potrebujemo še enačbe gravitacijskega polja kot ekvivalent (D.6). Z ozirom na veliko število gravitacijskih potencialov pa prav lahko pričakujemo še kakšen umeritveni pogoj kot (D.4) v elektromagnetni teoriji. Ključno vprašanje pa je seveda, kaj je izvor gravitacijskega polja. Po analogiji z vektorsko elektromagnetno teorijo, ki ima vektorski izvor (tok), pričakujemo, da mora imeti izvor gravitacijskega polja tenzorski značaj in seveda mora biti sorazmeren masi. Vodilo pri sklepanju bomo našli ob natančni analizi strukture elektromagnetnih enačb. Preden pa se lotimo teh problemov, je vredno pogledati strukturo gibalnih enačb (D.24). Predvsem nas mora zanimati, kako se zapišejo v limiti majhnih hitrosti in šibkih polj. Če naj bodo enačbe (D.24) resen kandidat za enačbe gibanja v gravitacijskem polju, se morajo v limiti majhnih hitrosti in šibkih polj zelo dobro skladati z Newtonovimi gibalnimi in gravitacijskimi enačbami, saj vemo, da je mogoče z njimi izredno natančno napovedati položaje planetov. Samo Merkur, ki se giblje od vseh planetov najhitreje in je Soncu najbližje, torej v najmočnejšem polju, kaže v nekaj letih komaj merljivo odstopanje (šibko polje pomeni majhne vrednosti komponent  $h_{\mu\nu}$ , saj z direktno geometrijsko meritvijo še nismo uspeli izmeriti, da bi se te komponente zaznavno razlikovale od  $\eta_{\mu\nu}$ ).

V limiti majhnih hitrosti je  $\dot{x}^0 \simeq c$  in  $v^i \ll c$ . Če so vse komponente tenzorja  $h$  med seboj primerljive in majhne, lahko v (D.24) zanemarimo vse komponente hitrosti v primerjavi z  $\dot{x}^0$  vse člene, kjer bi  $h$  nastopal v kvadratu. Vzemimo še, da opazujemo statično gravitacijsko polje, tako da je  $h_{\mu\nu,0} = 0$  za vse  $\mu$  in  $\nu$ . Od štirih enačb (D.24) izberimo najprej tisto z  $\mu = 0$ . Z upoštevanjem gornjih zanemaritev se ta zapiše:

$$c\ddot{t} = 0 \tag{D.27}$$

Drugi odvod časa po lastnem času je nič - torej lastni čas je sorazmeren času, ki ga merim v laboratoriju, to je prav tako kot smo navajeni v Newtonovi mehaniki. Napišimo še krajevne komponente enačb (D.24). Zopet zanemarimo majhne hitrosti in kvadrate gravitacijskih potencialov in dobimo za komponente pospeška ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{D.28}$$

Tudi ta enačba je povsem ekvivalentna gradientnemu zapisu Newtonovega gravitacijskega zakona, če identificiramo Newtonov gravitacijski potencial z  $-\frac{1}{2}c^2 h_{00}$ . Od

množice desetih gravitacijskih potencialov je v navadnem življenju pomembna le ena sama samcata "00" komponenta. Zato je tako težko spoznati, da je v drugačnih pogojih teorija gravitacije precej bolj komplicirana. Zanimivo je izračunati tudi velikost  $h_{00}$  v normalnih laboratorijskih razmerah. Npr. na površini Zemlje je gravitacijski potencial Zemlje enak:

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}\Phi_{Zem} = 2G\frac{M_{Zem}}{c^2 R_{Zem}} = \frac{2g}{c^2}\times R_{Zem} \approx \frac{20m s^{-2}}{9 \cdot 10^{16} m^2/s^2} \times 7000 km = 1.5 \times 10^{-9} \quad (D.29)$$

Majhnost brezdimenzijskega gravitacijskega potenciala je še dodaten razlog za to, da so nam metrične lastnosti prostora ostale tako dolgo skrite.

**Naloga D.8:** Izračunaj vrednost  $h_{00}$ , ki ga povzroča Sonce tam, kjer je Zemlja, na Merkurjevi orbiti in na površini Sonca.

## 5 Umeritvena invariantnost gravitacijske teorije

Povedali smo, da je teorija gravitacijske sile, kot jo vpelje Lagranževa funkcija (D.25), metrična teorija. Gravitacijsko silo smo vpeljali samo kot posledico spremenjenih metričnih relacij med "točkami" oziroma dogodki v 4-razsežnem prostoru. Seveda pa se zdi nevzdržno, da bi bila gravitacijska sila odvisna samo od tega, kako smo izvolili imenovati točke v prostoru. Ilustrirajmo ta pomislek na primeru. Vzemimo, da smo v prostoru vpeljali sferne koordinate  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Kartezične koordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  se izražajo z novimi koordinatami takole:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (E.1)$$

Tako je:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \sin \theta \cos \varphi + r d\theta \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta d\varphi \sin \varphi \\ dr \sin \theta \sin \varphi + r d\theta \cos \theta \sin \varphi + r \sin \theta d\varphi \cos \varphi \\ dr \cos \theta - r d\theta \sin \theta \end{pmatrix} \quad (E.2)$$

Odtod pa lahko izračunamo, da je:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (E.3)$$

Lagranževa funkcija prostega delca je v sfernih koordinatah po (C.12) (lahko bi vzeli tudi (C.13)):

$$L = \frac{m}{2}[-c^2\dot{t}^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)] \quad (\text{E.4})$$

To Lagranžovo funkcijo lahko razumemo tudi kot Lagranžovo funkcijo tipa (D.25), pri čemer je  $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  po komponentah:

$$(\underline{\eta} + \underline{h}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Zato so enačbe, gibanja, ki sledijo iz te Lagranžove funkcije kar (D.24), oziroma eksplicitno:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(mc^2\dot{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{t} = \gamma = \text{konst} \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{d\tau}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2 \sin\theta \cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\tau}(mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\dot{\varphi} \sin^2\theta = l_\varphi = \text{konst} \quad (\text{E.9})$$

Trije integrali enačb so takoj razvidni. Dve konstanti gibanja ( $\gamma$  in  $l_\varphi$ ) sta nakazani v (E.6) in (E.9), tretja konstanta pa je sama Lagranževa funkcija, kot je bilo pokazano v nalogi D.7. Še do dveh konstant lahko pridemo, če si ogledamo naslednja izraza:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}e^{i\varphi}) &= \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta})e^{i\varphi} + ir^2\dot{\theta}\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \\ &= r^2\{\sin\theta \cos\theta\dot{\varphi}^2 + i\dot{\varphi}\dot{\theta}\}e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Pri zadnji enakosti sem uporabil enačbo (E.8). Še drugi izraz, ki si ga velja ogledati, je:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}) &= \frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\varphi} \sin^2\theta \cot\theta e^{i\varphi}) = \\ &= r^2\dot{\varphi} \sin^2\theta \frac{d}{d\tau}(\cot\theta e^{i\varphi}) = ir^2\{\sin\theta \cos\theta\dot{\varphi}^2 + i\dot{\varphi}\dot{\theta}\}e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Pri predzadnji enakosti sem uporabil enačbo (E.9). Končno enačbo (E.11) pomnožim z  $i$  in prištejem (E.10) pa dobim:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ r^2 (\dot{\theta} + i\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) e^{i\varphi} \right] = 0 \quad (\text{E.12})$$

Torej je količina:

$$l_+ = mr^2 (\dot{\theta} + i\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) e^{i\varphi} \quad (\text{E.13})$$

konstanta gibanja; pravzaprav gre za dve konstanti - realni in imaginarni del ali  $l_+$  in  $l_- = l_+^*$  (Zvezdica označuje kompleksno konjugacijo.). Ker je Lagranževa funkcija (E.4) konstanta in je  $\dot{t}$  tudi konstanta, je tudi izraz  $E_k = L + \frac{1}{2}mc^2\dot{t}^2$  konstanta gibanja, ki jo lahko izrazimo kot:

$$E_k = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2mr^2}(l_+l_- + l_\varphi^2) \quad (\text{E.14})$$

Gornje pa je enačba za odvisnost  $r$  od časa, ki jo rešimo tako, da izrazimo  $\dot{r}$  z  $r$  in konstantami gibanja. Dobimo:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E_k}{m} - \left(\frac{l}{mr}\right)^2} \quad (\text{E.15})$$

oziroma

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_k}{m} - \left(\frac{l}{mr}\right)^2}} = \pm \int d\tau \quad (\text{E.16})$$

Z  $l^2$  sem označil konstanto  $l^2 = l_+l_- + l_\varphi^2$ . Po integraciji leve strani (Števec in imenovalc pomnožimo z  $r$  in upoštevamo, da je  $r \cdot dr = \frac{1}{2}dr^2$ .) preuredimo rezultat tako, da izrazimo  $r$  s  $\tau$  in dobimo:

$$r = \sqrt{\frac{l^2}{2mE_k} + \frac{2E_k}{m}\Delta\tau^2} \quad (\text{E.17})$$

Vstavimo (E.9) v (E.13) in množimo z  $e^{-i\varphi}$  pa dobimo:

$$l_+ e^{-i\varphi} \equiv |l_+| e^{-i(\varphi - \varphi_0)} = (mr^2\dot{\theta} + il_\varphi \cot \theta) \quad (\text{E.18})$$

Zapišemo realni in imaginarni dela pa dobimo:

$$r^2\dot{\theta} = \frac{|l_+|}{m} \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{E.19})$$

in

$$\cot \theta = \frac{|l_+|}{l_\varphi} \sin(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{E.20})$$

Še zadnjo enačbo dobimo, ko eliminiramo  $\theta$  iz (E.9) in (E.20). Rezultat je:

$$\frac{ml_\varphi d\varphi}{l^2 - l_+l_- \cos^2(\varphi - \varphi_0)} = \frac{d\tau}{r^2} \quad (\text{E.21})$$

Ko vstavimo (E.17) za  $r$  na desni strani, lahko obe strani integriramo in dobimo:

$$\tan(\varphi - \varphi_0) = \frac{l_\varphi \Delta\tau - \frac{l}{2E_k} \tan \psi_0}{l \Delta\tau \tan \psi_0 + \frac{l}{2E_k}} \quad (\text{E.22})$$

Pri tem je  $\tan \psi_0$  integracijska konstanta, ki smo jo dobili pri integraciji (E.21).

Enače (E.6), (E.17), (E.20) in (E.22) predstavljajo kompletno rešitev sistema enačb (E.6), (E.7), (E.8), (E.9) in so torej rešitev enačb gibanja prostega delca v sfernih koordinatah. Zahtevi, naj bo  $\tau$  lastni čas delca, ustrezemo s tem, da postavimo Lagranžovo funkcijo (E.4) (ki je konstanta gibanja) na vrednost  $L = -\frac{1}{2}mc^2$ , od koder sledi, da mora biti:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2E_k + mc^2}{mc^2}} \quad (\text{E.23})$$

Rešitev enačb gibanja za prosti delec prav gotovo izgleda dovolj komplicirano v sfernih koordinatah. Ali je ta rešitev istovetna z gibanjem po premicah, kot jo dobimo v kartezičnih koordinatah? Pokažimo da je! Enačbo (E.20) množimo z  $r \sin \theta$  in upoštevamo (E.1) pa dobimo:

$$r \cos \theta = z = \frac{|l_+|}{l_\varphi} (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0) r \sin \theta = \frac{|l_+|}{l_\varphi} (y \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0) \quad (\text{E.24})$$

Zapisano lepše:

$$zl_\varphi = y|l_+| \cos \varphi_0 - x|l_+| \sin \varphi_0 \quad (\text{E.25})$$

Torej, leži orbita glede na koordinatni sistem  $x, y, z$  v ravnini, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na vektor s kartezičnimi komponentami  $\hat{n}_x = (|l_+|/l) \sin \varphi_0$ ,  $\hat{n}_y = -(|l_+|/l) \cos \varphi_0$ ,  $\hat{n}_z = (l_\varphi/l)$ . Z upoštevanjem (E.1) zapišimo še enačbo (E.22) in dobimo:

$$\tan(\varphi - \varphi_0) = \frac{y \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0}{x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0} = -\frac{l_\varphi}{l} \left[ \frac{v \Delta\tau \cos \psi_0 + p \sin \psi_0}{v \Delta\tau \sin \psi_0 - p \cos \psi_0} \right] \quad (\text{E.26})$$



Pri tem sem zaradi krajše pisave vpeljal  $p = l/\sqrt{2mE_k}$  in  $v = \sqrt{2E_k/m}$ . Očitno mora veljati:

$$\begin{pmatrix} -x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0 \\ x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 \end{pmatrix} = a(\tau) \begin{pmatrix} l_\varphi(v\Delta\tau \cos \psi_0 + p \sin \psi_0) \\ -l(v\Delta\tau \sin \psi_0 - p \cos \psi_0) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.27})$$

pri čemer je  $a(\tau)$  zaenkrat poljuben sorazmernostni koeficient, ki je lahko tudi odvisen od lastnega časa. Ko upoštevamo (E.25), dobimo še:

$$z = a(\tau)|l_+|(v\Delta\tau \cos \psi_0 + p \sin \psi_0) \quad (\text{E.28})$$

Tako je:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= a^2(\tau)\{l_\varphi^2(v\Delta\tau \cos \psi_0 + p \sin \psi_0)^2 + l^2(v\Delta\tau \sin \psi_0 - p \cos \psi_0)^2 + |l_+|^2(v\Delta\tau \cos \psi_0 + p \sin \psi_0)^2\} \\ &= a(\tau)^2 l^2 \{(v\Delta\tau)^2 + p^2\} \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

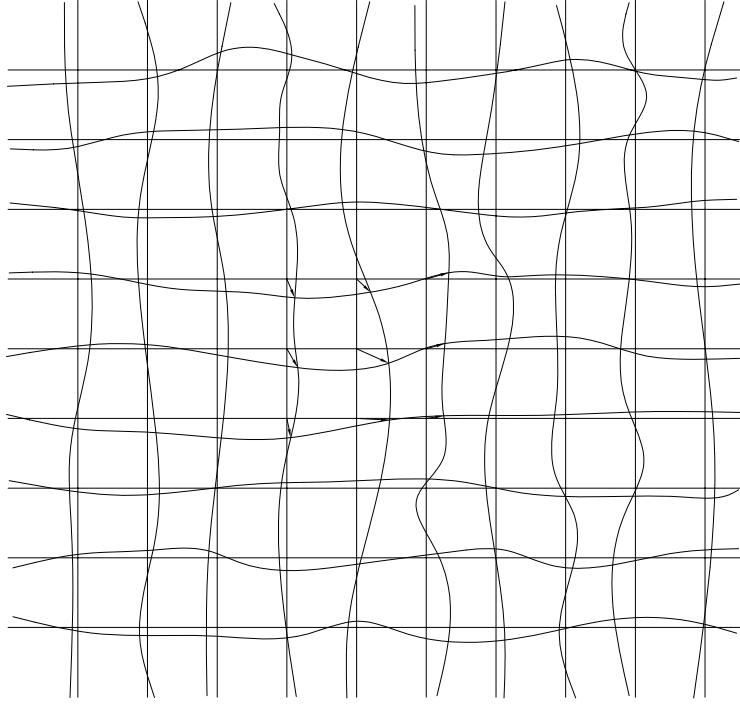
Ko primerjamo gornje s (E.17), ugotovimo, da mora biti  $a(\tau) = 1/l$ . Ko vstavimo to ugotovitev v (E.27) in (E.28), pridemo končno do zaključka, da so orbite prostih delcev res premice pri katerih kartezične komponente linearno naraščajo s časom. Do tega zaključka smo prišli zelo enostavno v kartezičnem koordinatnem sistemu in s precejšnjim naporom v krogljnih koordinatah.

Kar se tiče fizike dasta tako kartezični kot sferni koordinatni sistem isti rezultat. Da se pokazati, da to velja splošno za vse zvezne koordinatne sisteme, ki bi si jih utegnili zamisliti v prostoru in času. To pa pomeni - če izvira gravitacijska sila iz metrike prostora, potem ne sme biti odvisna od tega, katere koordinate smo izbrali v prostoru, z drugimi besedami, enačbe gravitacijskega polja morajo biti invariantne glede na vse transformacije koordinatnega sistema.

V (D.29) in v nalogi D.8 smo spoznali, da so vrednosti komponent gravitacijskih potencialov v praksi iz naše neposredne okolice zelo majhne. Druga ugotovitev, do katere smo se dokopali z gornjim primerom sfernega koordinatnega sistema pa je ta, da se enačbe gibanja vendarle najpreprosteje zapišejo v kartezičnih koordinatah, čeprav uvedba kakšnega drugačnega koordinatnega sistema ne spremeni fizikalne vsebine rešitev. Zato je vredno začeti študij teorije gravitacije v linearizirani verziji, to je s privzetkom o majhnosti vseh komponent tensorja  $h_{\mu\nu}$ . Seveda pa so tudi v linearizirani teoriji mogoče majhne spremembe koordinatnega sistema. Majhno spremembo koordinatnega sistema dosežemo tako, da točko (dogodek) s kartezičnimi koordinatami  $x^\mu$  prestavimo v točko  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\lambda)$  (Glej sliko 2).

V rahlo spremenjenih koordinatah  $x'^\mu$  se akcija (D.26) zapiše v obliki:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu})dx'^\mu dx'^\nu} =$$



Slika 2:

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu})(dx^\mu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda)(dx^\nu + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma)} \quad (\text{E.30})$$

Ko razrešimo oklepaje in upoštevamo, da dovolimo samo zelo majhne spremembe koordinat ( $|\xi^\mu, \nu| \ll 1$ ) in primerjamo s (D.26), ugotovimo, da se glede na koordinatne transformacije komponente tenzorja  $\underline{h}$  transformirajo v

$$h_{\mu\nu}(\varphi) = h'_{\mu\nu}(\varphi) + \xi_{\mu,\nu}(\varphi) + \xi_{\nu,\mu}(\varphi) \quad (\text{E.31})$$

Tako kot je elektromagnetna teorija invariantna glede na umeritvene transformacije (B.6) ali (D.5) (zapisano v pisavi specialne relativnosti), mora biti gravitacijska teorija invariantna glede na transformacije (E.31) Umeritvene transformacije gravitacijske teorije vsebujejo poljubno vektorsko polje  $\xi^\mu$ . Kot so enačbe elektromagnetnega polja najbolj preproste, če je izpolnjen poseben umeritveni pogoj (B.7) oz (D.4), so tudi enačbe gravitacijskega polja najbolj preproste v posebni umeritvi. Po izkušnji z računanjem orbite prostega delca v sfernih koordinatah bomo največkrat računali v umeritvi, ki da v odsotnosti mas za vse gravitacijske potenciale avtomatično vrednost nič.

**Naloga E.1:** Vzemimo, da se koordinatni sistem  $x', y', z'$  vrtil glede na koordinatni sistem  $x, y, z$ , tako da je

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\y' &= -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \quad ,\end{aligned}\tag{E.32}$$

in  $z' = z$ ,  $t' = t$ . Pokaži da se v sistemu  $S'$  zapišejo komponente tenzorja  $\underline{h}$  v obliki:

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} \omega^2(x'^2 + y'^2)/c^2 & -\omega y'/c & \omega x'/c & 0 \\ -\omega y'/c & 0 & 0 & 0 \\ \omega x'/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{E.33}$$

Zapiši enačbe gibanja (D.24). Pokaži, da tvorijo krajevne komponente pospeška komponente vektorja, ki je vsota relativnega in systemskega pospeška v vrtečem sistemu.

**Naloga E.2:** Pokaži, da je mogoče najti koordinatno transformacijo tipa (E.31), ki transformira tenzor

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} 2ax/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{E.34}$$

v nič (vzemi, da je  $x \ll c^2/a$ ). Zapiši enačbe gibanja (D.24) za delec v polju  $\underline{h}$  iz (E.34), in pokaži, da se njegov pospešek zapiše kot vsota relativnega in systemskega pospeška  $a$ .

V nalogah 5 in 5 smo hoteli pokazati, da se lahko z umeritvenimi transformacijami preselimo v sisteme, ki se vrte ali pospešujejo glede na poljuben inercialni sistem (ali počno še kaj bolj kompliciranega). Če smo na vrteči se Zemlji in moramo upoštevati pojave, ki iz tega izvirajo, bomo uporabljali tak vrteči koordinatni sistem v katerem mi zemljani približno mirujemo, vse vesolje pa se vrtil okrog nas. Če pa raziskujemo pojave na vesoljski skali, se je bolj preprosto postaviti v inercialni sistem, glede na katerega gibanje zvezd ni sistematično urejeno. Predstavljamo si, da tako opažene relacije niso obremenjene še z dodatnimi pojavi, ki so posledica našega dnevnega vrtenja in kroženja okoli Sonca.

## 6 Enačbe gravitacijskega polja in napetostni tenzor

Kakšne naj bodo enačbe gravitacijskega polja? Po dosedanji razpravi moramo zahtevati:

- i) da so invariantne glede na lokalne Lorentzove transformacije
- ii) da je gravitacijsko polje opisano s tenzorskim poljem  $\underline{h}$ ,
- iii) da je gravitacijska teorija invariantna glede na umeritvene transformacije, ki se v limiti šibkega polja zapišejo v obliki (E.31)
- iv) v dovolj veliki oddaljenosti od mirujoče mase  $M$  se mora komponenta gravitacijskega potenciala  $h_{00}$  v skladu s (D.28) zapisati v obliki:

$$h_{00} \rightarrow \frac{2}{c^2} G \frac{M}{r} \quad (\text{F.1})$$

Vzemimo za vodilo enačbe (D.6)! To so linearne parcialne diferencialne enačbe drugega reda. Leve strani se obnašajo kot komponente četvernega vektorja (pri prehodu v drug inercialni sistem se transformirajo v skladu s (D.17)) in so invariantne glede na umeritvene transformacije (D.5). Na analogen način konstruiramo enačbe gravitacijskega polja kot linearne (v približku šibkega polja!) parcialne diferencialne enačbe drugega reda, katerih leve strani se obnašajo kot komponente četvernega tenzorja (morajo se transformirati v skladu s (D.23)) in so invariantne glede na umeritvene transformacije (E.31). Tenzorski značaj drugih odvodov gravitacijskih potencialov (tenzor mora biti simetričen) zahteva, da so na levi strani enačb lahko le členi oblike:

$$A_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\sigma} h_{\mu\nu,\lambda\sigma} \quad (\text{F.2})$$

$$B_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\sigma} (h_{\mu\lambda,\nu\sigma} + h_{\nu\lambda,\mu\sigma}) \quad (\text{F.3})$$

$$C_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma,\mu\nu} \quad (\text{F.4})$$

Pravilna linearna kombinacija teh členov je tista, ki je invariantna glede na umeritvene transformacije (E.31). Zapišimo to kombinacijo zaenkrat še s splošnima koeficientoma  $a$  in  $b$  in poiščimo tako vrednost, da ostane izraz nespremenjen po umeritveni transformaciji (E.31)!

$$L_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + aB_{\mu\nu} + bC_{\mu\nu} = \quad (\text{F.5})$$

$$= A'_{\mu\nu} + aB'_{\mu\nu} + bC'_{\mu\nu} + \eta^{\lambda\sigma} \left[ (1+a)(\xi_{\mu,\nu\lambda\sigma} + \xi_{\nu,\mu\lambda\sigma}) + 2(a+b)\xi_{\lambda,\sigma\mu\nu} \right] \quad (\text{F.6})$$

**Naloga F.1:** Pokaži, da preide (F.5) v (F.6) po umeritveni transformaciji (E.31)!

Izraz (F.6) je torej invarianten glede na umeritvene transformacije le, če je

$$a = -1 \quad in \quad b = -a = 1 \quad (F.7)$$

Pričakujemo torej, da imajo enačbe gravitacijskega polja vsaj za šibka polja obliko:

$$\eta^{\lambda\sigma} (h_{\mu\nu,\lambda\sigma} - h_{\mu\sigma,\nu\lambda} - h_{\nu\lambda,\mu\sigma} + h_{\lambda\sigma,\mu\nu}) = \kappa D_{\mu\nu} \quad , \quad (F.8)$$

pri čemer je  $D_{\mu\nu}$  izvor gravitacijskega polja, ki mora biti (v skladu s točko iv) zgoraj sorazmeren masi,  $\kappa$  pa je ustrezna sklopitvena konstanta (analogna  $\mu_0$  v elektromagnetni teoriji).

Enačbe (F.8) so razmeroma komplicirane. Poglejmo njihovo strukturo in poiščimo umeritev, v kateri je njihova oblika preprostejša. V ta namen izračunajmo divergenco obeh strani v (F.8) (glej dogovor (D.18)!):

$$\begin{aligned} \kappa D_{\mu\nu, \nu} &= h_{\mu\nu, \nu\lambda} - h_{\mu\lambda, \nu\nu} - h_{\nu\lambda, \mu\nu} + h_{\lambda\sigma, \mu\nu}^{\nu} = \\ &= h_{\lambda, \nu\mu}^{\nu} - h_{\nu\lambda, \mu}^{\nu} = (h_{\lambda, \nu}^{\nu} - h_{\nu\lambda, \nu}^{\nu})_{,\mu} \\ &= \frac{1}{2} \kappa D_{\lambda, \mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \kappa (\eta_{\mu\nu} D_{\lambda}^{\lambda})_{,\nu} \end{aligned} \quad (F.9)$$

Opazili smo, da je izraz v predzadnji vrstici enak izrazu, ki je napisan v zadnji vrstici (prepričaj se!). Tako pridemo do identitete:

$$(D_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} D_{\lambda}^{\lambda})_{,\mu} = 0 \quad , \quad (F.10)$$

Lahko rečemo, da je (F.10) posledica umeritvene invariantnosti gravitacijske teorije, ker enačba ne bi veljala, če ne bi bile izpolnjene enačbe (F.7). Ta identiteta, ki spominja na identiteto  $j_{\mu, \mu} = 0$  v elektromagnetni teoriji, prav tako rodi pomemben ohranitveni zakon. Zato je smiselno smatrati izraz  $T_{\mu\nu} = (D_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} D_{\lambda}^{\lambda})$  za izvor gravitacijskega polja. Enačbe gravitacijskega polja se tako zapišejo v obliki:

$$h_{\mu\nu, \lambda}^{\lambda} - (h_{\mu\lambda, \nu}^{\lambda} + h_{\nu\lambda, \mu}^{\lambda}) + h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_{,\lambda}^{\lambda} + \eta_{\mu\nu} h_{\lambda\sigma, \lambda\sigma} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (F.11)$$

pri čemer, ponovimo še enkrat, je divergenca napetostnega tenzorja identično enaka nič:

$$T_{\mu\nu, \nu} = 0. \quad (F.12)$$

Zgoraj smo označili sled gravitacijskega tenzorja s  $h$  in sicer:

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (\text{F.13})$$

Do lepše oblike enačb (F.11) pridemo, če vpeljemo nov tenzor:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (\text{F.14})$$

V novi preobleki se enačbe (F.11) glase:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\lambda} - \left( \bar{h}_{\mu\lambda,\nu} + \bar{h}_{\nu\lambda,\mu} \right) + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\lambda\sigma,\lambda\sigma} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{F.15})$$

Iz tega zapisa je jasno, da je ugodno izbrati umeritveni pogoj:

$$\bar{h}_{\mu\lambda,\lambda} = 0 \quad (\text{F.16})$$

V tej umeritvi pa imajo gravitacijske enačbe res preprosto obliko:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\lambda} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{F.17})$$

Končno smo prišli do enačb gravitacijskega polja, ki ustrezajo pogojem i), ii) in iii) zgoraj. Ostane nam še poiskati zvezo med izvorom gravitacijskega polja  $T_{\mu\nu}$  in maso, ki to polje povzroča. Vodilo pri tem iskanju je seveda zadnji od gornjih pogojev (iv).

Mirujoča masa v teoriji gravitacije ima v elektromagnetni teoriji za ekvivalent mirujoč naboj. Tok mirujočega naboja ( $I_\mu$ ) ima v elektromagnetni teoriji samo časovno komponento različno od nič (glej (D.10)). Časovna komponenta gostote toka je od nič različna samo v točki, kjer se naboj nahaja, njen integral po prostoru v katerem naboj miruje, pa je enak toku. V poljubnem inercialnem sistemu dobimo tok tako, da se z Lorentzovo transformacijo preselimo v ustrezen inercialni sistem (Glej (D.17) in ustrezne komentarje!). Na podoben način iščemo nastavek za desno stran enačbe (F.17). Točkasti masi  $M$  v mirujočem sistemu pripišemo tenzor  $\mathfrak{N}$ , ki ima samo časovno komponento sorazmerno masi, vse ostale njegove komponente pa naj bodo v tem sistemu enake nič. Dogovorjeno je, da vzamemo

$$\mathfrak{N}_{00} = Mc^2 \quad (\text{F.18})$$

Tenzor  $T_{\mu\nu}$ , ki je sorazmeren gostoti mase, pa naj da  $\mathfrak{N}$ , če ga integriramo po prostoru glede na katerega masa miruje:

$$\int_{M_{mir}} T_{\mu\nu} dV = \mathfrak{N}_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{F.19})$$

Po tem kar smo povedali zgoraj, pričakujemo samo za  $\bar{h}_{00}$  od nič različen izvor v mirovalnem sistemu mase. V tem sistemu so tudi vsa polja neodvisna od časa, zato se enačba (F.17) za  $\bar{h}_{00}$  poenostavi v obliko:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = \kappa T_{00} = \begin{pmatrix} \neq 0 \text{ pri } r = 0 \\ = 0 \text{ povsod drugjex} \end{pmatrix} \quad (\text{F.20})$$

Reševanje takih enačb je stvar matematične fizike; rešitev pa je:

$$\bar{h}_{00} = \frac{C}{r} \quad \text{za} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{F.21})$$

Konstanto  $C$  določimo s pomočjo Gaussovega izreka, ki pravi, da je integral divergence vektorskega polja po prostornini enak integralu tega vektorskega polja po površini, ki to prostornino objema. Če integriramo (F.20) po vsej prostornini, dobimo:

$$\int_{M_{mir}} \nabla^2 \bar{h}_{00} dV = \int_{M_{mir}} \kappa T_{00} dV = \kappa \mathfrak{N}_{00} = \kappa M c^2 \quad (\text{F.22})$$

Po Gaussovem izreku je:

$$\int_{M_{mir}} \nabla^2 \bar{h}_{00} dV = \oint \nabla \bar{h}_{00} \cdot d\vec{S} = - \oint \frac{C}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = -4\pi C \quad (\text{F.23})$$

Ko primerjamo (F.22) in (F.23) dobimo:

$$-4\pi C = \kappa M c^2 \quad (\text{F.24})$$

Ker so izvori za ostale komponente tenzorja  $\bar{h}_{\mu\nu}$  enaki nič, izginejo po umeritvenemu pogoju (F.16) tudi ustrezne komponente tenzorja  $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$  če  $\mu \neq \nu \neq 0$ .

**Naloga F.2:** Pokaži, da rešitev (F.21) skupaj s  $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$  če  $\{\mu\nu\} \neq \{00\}$  ustreza umeritvenemu pogoju (F.16).

Izračunajmo še komponente tenzorja  $h_{\mu\nu}$ ! Enačbe (F.14) obrnemo in dobimo:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \quad , \quad (\text{F.25})$$

**Naloga F.3:** Pokaži, da je (F.25) obrat (F.14).

Tako je  $\bar{h} = \eta^{00} \bar{h}_{00} = -\bar{h}_{00}$  in

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} \bar{h} = \frac{1}{2} \bar{h}_{00} = -\frac{\kappa}{8\pi} \frac{M c^2}{r} \quad (\text{F.26})$$

Ko primerjamo s (F.1), ugotovimo, da mora biti

$$\kappa = -\frac{16\pi G}{c^4} \quad (\text{F.27})$$

Zapišimo enačbe gravitacijskega polja (F.15) še enkrat z znanimi konstantami:

$$\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (\text{F.28})$$

Kaj lahko povemo o tenzorju  $T_{\alpha\beta}$ , ki nastopa kot izvor gravitacijskega polja? Naštajmo lastnosti, ki smo jih do sedaj od njega zahtevali:

- i) Napetostni tenzor točkaste mase ima v sistemu glede na katerega masa miruje le komponento "00" različno od nič
- ii) Če integriramo  $T_{00}$  po prostoru v katerem masa miruje, dobimo  $Mc^2$ , pri čemer je  $M$  vsa masa, ki smo jo objeli z integracijo (enačba (F.18)).
- iii) Če se preselimo v drug inercialni sistem z lokalno Lorentzovo transformacijo, se mora napetostni tenzor transformirati ravno tako kot tenzor gravitacijskih potencialov  $h_{\mu\nu}$ , to je tako, kot narekuje (D.23). V sistemu glede na katerega se masa giblje po trajektoriji  $x^\mu = \xi^\mu(\tau)$ , mora imeti tenzor  $\aleph_{\mu\nu}$  komponente:

$$\aleph_{\mu\nu} = M\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} \quad (\text{F.29})$$

Primerjaj s (D.10)! Podobno kot lahko sklepamo na gostoto toka iz toka (D.11), lahko sklepamo o napetostnem tenzorju iz njegovega integrala po prostoru; napetostni tenzor za točkasto maso lahko zapišemo v obliki:

$$T^{\mu\nu}(x^\lambda) = M \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\xi}^\mu(\tau)\dot{\xi}^\nu(\tau)\delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau))cd\tau \quad (\text{F.30})$$

iv) Napetostni tenzor avtomatično zadošča pogoju (F.10), ki ga je vredno zapisati še enkrat:

$$\eta^{\mu\nu}T_{\alpha\mu,\nu} = 0 \quad (\text{F.31})$$

**Naloga F.4:** Zapiši komponente divergence napetostnega tenzorja za točkasti delec (F.30) in pokaži, da je njihova vrednost enaka nič samo, če se delec prosto giblje.

Kaj pomeni enačba (F.31)? Njen pomen lažje razvozlamo, če se spomnimo, da obstaja podobna relacija tudi v elektromagnetni teoriji. Namesto (F.10) smo v elektromagnetni teoriji postavili umeritveni pogoj (D.4) ki zahteva, da je divergenca gostote toka enaka 0, to je:

$$j^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (\text{F.32})$$



Ločimo časovne in krajevne komponente in upoštevamo (D.8), pa dobimo:

$$j^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial j^0}{\partial ct} + \frac{\partial j_i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{F.33})$$

To je znana kontinuitetna enačba, ki zagotavlja, da se električni naboj ohranja. Pomen te enačbe si predstavljamo še takole: Vzemimo prostornino  $V$  omejeno s površino  $\partial V$ . Enačbo (F.33) množimo s časovnim intervalom  $\delta t$ , integriramo po prostornini  $V$ , in upoštevamo že omenjeni Gaussov izrek pa dobimo:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \delta t + \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV \delta t = \delta Q + \delta t \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{F.34})$$

Prvi integral ( $\delta Q$ ) pove za koliko se je povečal naboj v prostornini  $V$  v časovnem intervalu  $\delta t$ , drugi pa pove koliko naboja je v tem času odteklo iz te prostornine skozi ploskev  $\partial V$ . Vsota obeh količin je enaka nič in to pomeni, da naboj ne more izginiti, ampak se lahko kvečjemu pretoči drugam.

Tudi v teoriji gravitacije imamo naboj - maso, ki se ohranja. Tako lahko govorimo o gostoti masnega toka  $j_{(m)}^\lambda$ , pri čemer je po zgledu (D.8):

$$j_{(m)}^0 = \rho_{(m)} c \quad , \quad (\text{F.35})$$

pri čemer je  $\rho_{(m)}$  običajna masna gostota, komponente  $j_{(m)}^i$  za  $i = 1, 2, 3$  pa tvorijo komponente (tri) vektorja masnega toka  $\vec{j}_{(m)}$ . Tudi ta "naboj" se ohranja, podobno kot električni; tudi njegova divergenca je enaka nič. Po analogiji smemo sklepati, da izraža tudi (F.31) ohranitveni zakon, vendar ne za skalarno, temveč za vektorsko količino.

Upoštevaje (F.19), (F.20) in (F.29) in (F.30) sklepamo, da se komponente tenzorja  $T_{\mu\nu}$  izražajo za točkasto telo, ki se giblje glede na izbrani inercialni sistem po trajektoriji  $x^\mu = \xi^\mu(\tau)$ , takole:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \rho_{(m)} c \dot{x}^0 & -\dot{x}^0 \vec{j} \\ -\dot{x}^0 \vec{j} & \vec{j} \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{(m)} & -\vec{j}_{(w)} c \\ -\vec{j}_{(w)} c & \vec{j}_{(w)} \vec{v} \end{pmatrix} \quad (\text{F.36})$$

V drugem izrazu smo vpeljali gostoto mase-energije, ki jo prispeva masa v prostoru  $w_{(m)} = \gamma \rho c^2$  in gostoto toka mase-energije  $j_{(w)} = \gamma \vec{j}$ . Simbolična pisava zgoraj seveda pomeni, da smo ločili časovno-časovno komponento, časovno-krajevne komponente in krajevno-krajevne komponente.

**Naloga F.5:** Utemelji zakaj stojijo pred komponentami toka znaki "-". Naloga B.6 je lahko pri tem v pomoč.

Sedaj smo pripravljeni razmišljati o pomenu pogoja (F.31). Po poti, ki nas je pripeljala do (F.34) preoblikujemo (F.31) in pridemo do oblike:

$$\int_V \delta w_{(m)} dV + \delta t \oint_{\partial V} \vec{j}_{(w)} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{F.37})$$

in

$$\int_V \delta \vec{j}_{(w)} dV + \delta t \oint_{\partial V} \vec{j}_{(w)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (\text{F.38})$$

Enačbo (F.37) spoznamo kot enačbo o ohranitvi mase-energije; podobno kot nabor se lahko masa-energija samo pretaka, ne more pa se izgubiti. Drugo enačbo (F.38) pa prepoznamo kot enačbo o ohranitvi celotne gibalne količine. Sprememba gibalne količine  $\delta \vec{P} (= \int_V \delta \vec{j}_{(w)} dV)$  v prostornini  $V$  v časovnem intervalu  $\delta t$  je enaka toku gibalne količine skozi ploskev, ki objema prostornino  $V$ , to pa je po Newtonovem zakonu sunek sile v časovnem intervalu  $\delta t$ , ki deluje na porazdelitev snovi v prostornini  $V$ .

V okviru teorije relativnosti smo tako spoznali dva najpomembnejša fizikalna zakona - o ohranitvi energije in o ohranitvi gibalne količine kot posledico umeritvene invariantnosti te teorije. Ta pa je logična posledica dveh preprostih privzetkov, to je lokalne Lorentzove invariantnosti fizikalnih zakonov in privzetka, da je teorija gravitacije metrična teorija. To je verjetno najmočnejši rezultat teorije relativnosti in tisti, ki ima najbolj daljnosežne posledice za celotno zgradbo teoretične fizike.

## Ilustracije

Do sedaj smo shajali z razmeroma simboličnimi izrazi, le v nekaterih nalogah smo skušali pokazati, da je relativistična fizika zelo podobna neralativistični. Aparat specialne, še bolj pa splošne relativnosti, je drugačen od aparata Newtonove mehanike, kjer imamo opravka samo z nazornimi vektorji v trirazsežnem prostoru. Tudi specialna in splošna relativnost poznata te pojme. Razlika pa je v tem, da tri komponente vektorja v splošnem ne zadostujejo za celotno rekonstrukcijo količine, ki jo imamo v mislih. Potrebujemo še četrto komponento, oziroma povedati moramo v katerem inercialnem sistemu ima vektor dane tri komponente, četrta komponenta pa je nič. V Newtonovi fiziki imamo vedno opravka z majhnimi hitrosti, zato je implicitno vedno res, da ima vsak 3-vektor o katerem govorimo, vedno v izbranem koordinatnem sistemu četrto komponento enako 0. Namen teh primerov je prevesti linearizirano teorijo gravitacije v jezik sil, hitrosti, pospeškov itd., kot smo jih vajeni v klasični Newtonovi mehaniki in hkrati pomagati bralcu do domačnosti s pojmi četvernih vektorjev in tenzorjev.

## 7 Napetostni tenzor

Videli smo, da je eden najpomembnejših pojmov teorije gravitacije napetostni tenzor. Zato se je vredno pri njem nekoliko dlje pomuditi. Najprej bomo izračunali napetostni tenzor najbolj preproste snovi, to je idealnega plina in pogledali kakšen pomen imajo posamezne njegove komponente s tem, da bomo plinu izmerili tlak in ga stehali. Nato bomo na podlagi te izkušnje konstruirali napetostni tenzor elektromagnetnega in gravitacijskega polja.

### 7.1 Napetostni tenzor idealnega plina

Idealni plin smo si po Boltzmannu navajeni predstavljati kot množico zelo majhnih (pravzaprav točkastih) delcev, ki se neurejeno gibljejo v vse smeri s tem, da je povprečna kinetična energija delcev sorazmerna temperaturi plina. Interakcijo med delci lahko za vse praktične namene zanemarimo. Skrbi samo za to, da se po dovolj dolgem času plin dobro premeša. To pomeni, da je po dovolj dolgem času porazdelitev delcev po hitrostih neodvisna od kraja, časa in smeri gibanja, če seveda ni zunanjih časovno odvisnih motenj in če je plin v ravnovesju pri konstantni temperaturi.

Napetostni tenzor za plin je seveda vsota napetostnih tenzorjev za vse delce, ki plin sestavljajo, torej je po F.30 različen od nič v vseh točkah, kjer se plinski delci nahajajo in nič drugod. Če govorimo o plinu kot o kontinuumu, tako drobno

razločevanje nima smisla, zato definiramo napetostni tenzor plina kot povprečje po majhni prostornini - a dovolj veliki, da še vedno vsebuje veliko delcev - deljeni s to prostornino: Napetostni tenzor za plin tako napišemo v obliki:

$$T_{\text{plin}}^{\mu\nu}(x^\lambda) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3x \sum_i^N \int_{-\infty}^{\infty} m_i \xi_i^\mu(\tau) \dot{\xi}_i^\nu(\tau) \delta^4(x^\lambda - \xi_i^\lambda(\tau)) c d\tau, \quad (\text{G.1.1})$$

pri čemer so  $\xi_i^\lambda(\tau)$  komponente svetovnice  $i$ -tega delca. V okolici trenutku  $t = 0$  izberemo za vse delce  $\tau = 0$  in zapišemo njihove svetovnice:

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_i &= \gamma_i \underline{v}_i \tau + \underline{\xi}_i^{(0)} \\ \xi_i^0 &= \gamma_i c \tau. \end{aligned} \quad (\text{G.1.2})$$

Funkcijo  $\delta^4$  v G.1.1 razbijemo na prostorski in krajevni del in integriramo po  $\tau$  ter dobimo:

$$\begin{aligned} T_{\text{plin}}^{00}(\underline{x}, t = 0) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\underline{x} \in \Delta V} d^3x \sum_a^N m_a \gamma_a c^2 \delta^3(\underline{x} + \underline{x} - \underline{\xi}_a^{(0)}) \\ T_{\text{plin}}^{0k}(\underline{x}, t = 0) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\underline{x} \in \Delta V} d^3x \sum_a^N m_a \gamma_a v_a^k c \delta^3(\underline{x} + \underline{x} - \underline{\xi}_a^{(0)}) \\ T_{\text{plin}}^{jk}(\underline{x}, t = 0) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\underline{x} \in \Delta V} d^3x \sum_a^N m_a \gamma_a v_a^j v_a^k \delta^3(\underline{x} + \underline{x} - \underline{\xi}_a^{(0)}) \end{aligned} \quad (\text{G.1.3})$$

Integrali prostorskih funkcij  $\delta$  po  $\Delta V$  dajo ena, če ustrezeni delec ( $a$ ) leži v  $\Delta V$  in nič drugače. Torej je  $T_{\text{plin}}^{00}$  enaka vsoti vseh polnih (mirovalnih plus kinetičnih) energij delcev v enoti prostornine, kot jo meri izbrani inercialni opazovalec. Če izberemo inercialni sistem glede na katerega izbrana okolica plina v povprečju miruje, je  $T_{\text{plin}}^{00}$  gostota lastne polne energije, to je vsota  $j_{(m)}^0 c$  in gostote notranje energije (glej D.12). Glede na ta inercialni sistem so vse komponente  $T_{\text{plin}}^{0k}$  enake nič. Če je plin tudi v lokalnem termodinamičnem ravnovesju, ostanejo od krajevnih komponent samo diagonalni členi, ki so vsi enaki, saj različne komponente hitrosti v ravnovesnem stanju niso korelirane, hitrostna porazdelitev pa je lokalno izotropna. Zato lahko v tem primeru zapišemo:

$$T_{\text{plin}}^{jk}(\underline{x}, t = 0) = \frac{1}{3\Delta V} \delta^{jk} \int_{\underline{x} \in \Delta V} d^3x \sum_a^N m_a \gamma_a v_a^2 \delta^3(\underline{x} + \underline{x} - \underline{\xi}_a^{(0)})$$

V nerelativistični limiti gre  $\frac{1}{2}m_a\gamma_a v_a^2$  proti kinetični energiji  $a$ -tega delca, torej gre diagonalni elementi krajevnih komponent napetostnega tenzorja proti  $\frac{2}{3}$  gostote notranje energije. To je tlak plina. Videli bomo, da predstavljajo krajevne komponente napetostnega tenzorja vedno tlak. V ultrarelativistični limiti gre  $\frac{1}{2}m_a\gamma_a v_a^2$  proti polni energiji delca, zato je tlak relativističnega plina samo tretjina gostote polne energije (npr. za plin fotonov).

Napetostni tenzor za idealni plin, ki se giblje glede na opazovalca dobimo tako, da se iz lastnega sistema preselimo v sistem, glede na katerega se lastni sistem giblje. To najlaže storimo tako, da napišemo napetostni tenzor mirujočega plina v obliki:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{w_{\text{polna}} + p}{c^2} \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.1.4})$$

Prvi tenzor zgoraj je diadni produkt vektorja četverca hitrosti (mirujočega) opazovalca s samim seboj, drugi tenzor pa predstavlja matriko  $\eta$ , zato vemo, da se napetostni tenzor za idealni plin zapiše glede na poljubno gibajočega se opazovalca glede na plin kot:

$$T^{\mu\nu} = \frac{w_{\text{polna}} + p}{c^2} u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu} , \quad (\text{G.1.5})$$

pri čemer so  $u^\mu$  komponente plina glede na opazovalca,  $w_{\text{polna}}$  in  $p$  pa sta lastna gostota polne energije in lastni tlak plina, to sta gostota energije in tlak kakršnega bi izmeril opazovalec, ki miruje glede na plin.

Na podoben način lahko razmišljamo tudi o gostoti masnega toka D.12. V lastnem sistemu je samo časovna komponenta gostote masnega toka različna od nič. Njeno vrednost  $\rho c$  dobimo s podobnim povprečevanjem kot zgoraj, pri čemer je  $\rho$  zopet lastna gostota plina. Četverec gostote masnega toka je torej v splošnem:

$$j_{(m)}^\mu = \rho u^\mu \quad (\text{G.1.6})$$

V točki iv) v prejšnjem poglavju smo trdili, da mora biti divergenca napetostnega tenzorja enaka nič, prav tako smo v četrtem poglavju (D.12) pokazali, da je divergenca masnega toka enaka nič. To skupaj predstavlja pet ohranitvenih zakonov, katerih pomen si hočemo sedaj ogledati. Ohranitev mase, ki sledi iz kontinuitetne enačbe D.9 in toka G.1.6 se zapiše v obliki:

$$j_{(m),\mu}^\mu = \rho_{,\mu} u^\mu + \rho u^\mu_{,\mu} = \frac{d\rho}{d\tau} + \rho u^0_{,0} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \quad (\text{G.1.7})$$

Upoštevali smo, da je  $\rho_{,\mu} u^\mu = \frac{d\rho}{d\tau}$ , zadnji člen pa smo razbili na časovni in krajevni del. V nerelativistični limiti se čas in lastni čas ne razlikujeta, zato je tudi "pospešek časa"  $u^0_{,0}$  enak nič in enačba G.1.7 preide v znano obliko kontinuitetne enačbe za ohranitev mase. Napetostni tenzor G.1.5 najprej zapišemo tako, da razbijemo gostoto polne energije na gostoto mirovalne energije in gostoto notranje energije  $w_{\text{polna}} = \rho c^2 + w_n$ . Tako dobimo:

$$T^{\mu\nu} = u^\mu j^\nu + \frac{w_n + p}{c^2} u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu} \quad . \quad (\text{G.1.8})$$

Divergenco napetostnega tenzorja dobimo upoštevaje G.1.7, G.1.6 in identiteto  $u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}$  v obliki:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = \left( \rho + \frac{w_n + p}{c^2} \right) \dot{u}^\mu + \rho u^\mu \frac{d}{d\tau} \left( \frac{w_n + p}{\rho c^2} \right) + p_{,\mu} = 0 \quad (\text{G.1.9})$$

**Naloga G.1.1:** Naredi vse korake od G.1.5 do G.1.9.

Časovno komponento teh enačb dobimo, če jih projiciramo na lokalno hitrost plina, to je:

$$u_\mu T^{\mu\nu}_{,\nu} = -\rho \frac{d}{d\tau} \left( \frac{w_n + p}{\rho} \right) + \frac{dp}{d\tau} = 0. \quad (\text{G.1.10})$$

Če gornje pomnožimo z  $\Delta m$ , maso opazovanega dela plina, in upoštevamo, da sta  $\Delta E_n = \frac{w_n}{\rho} \Delta m$  in  $\Delta V = \Delta m / \rho$  notranja energija in prostornina opazovane mase, spoznamo, da gre za zakon o ohranitvi energije v obliki:

$$\frac{d\Delta E_n}{d\tau} = -p \frac{d\Delta V}{d\tau} \quad (\text{G.1.11})$$

Spremembe notranje energije zaradi dovedene toplote v tem izrazu ni, saj so v našem idealnem plinu trki načeloma tako redki, da nimamo ireverzibilnega mehanizma, ki bi lahko spreminjal entropijo.

**Naloga G.1.2:** Kako se spremeni gornja enačba, če napetostnemu tenzorju dodamo viskozne člene v obliki  $T_{\text{visk}}^{\mu\nu} = \chi (u^{\mu,\nu} + u^{\nu,\mu}) + (\Xi - \frac{1}{2}\chi) \eta^{\mu\nu} u^{\lambda,\lambda}$ :

Pomen krajevnih komponent enačb G.1.9 hitro razumemo, če jih zapišemo za nerelativističen plin ( $p \ll \rho c^2$ ) v inercialnem sistemu glede na katerega se plin giblje počasi ( $u^i \ll c$ ). Krajevne komponente enačb G.1.9 se poenostavijo v:

$$\rho \dot{\vec{u}} = -\nabla p, \quad (\text{G.1.12})$$

kar je znana Newtonova enačba za opisovanje gibanja nevizkoznih fluidov.

**Naloga G.1.3:** Zapiši enačbe gibanja ( $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ ) za viskozni fluid.

Za konec stehtajmo idealni plin, s katerim smo napihbili balon. Tehtanje izvedemo tako, kot je v navadi med astronomi; v krožno orbito okrog balona (ki je seveda nekje daleč v vesolju proč od velikih mas) vtirimo testni delec (delec katerega masa je mnogo manjša od mase plina). Merimo polmer krožne orbite ( $a$ ) in obhodni čas ( $T$ ) ter izračunamo maso plina v balonu (skupaj z maso balona) po tretjem Keplerjevem zakonu:  $M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}$ .

Komponente napetostnega tenzorja za plin v mirujočem balonu zapišemo po (G.1.4) v obliki:

$$T^{plin} = \begin{pmatrix} w_{polna}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & p, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & p, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & p \end{pmatrix} \Theta(r_0 - r) \quad (\text{G.1.13})$$

Pri tem sta:  $\Theta(x)$  je Heavisideova funkcija z lastnostjo  $\Theta(x) = 1$  če  $x > 0$  in  $\Theta(x) = 0$  če  $x < 0$ ,  $r_0$  pa je polmer balona.

Zapisati moramo še komponente napetostnega tenzorja za balonsko opno, saj brez nje plin nebi miroval znotraj krogle s polmerom  $r_0$ , ampak bi se razbežal na vse strani. Enačba gibanja (F.31) zahteva, da ima napetostni tenzor vsega - v našem primeru sta to opna in plin - divergenco enako nič. To je mogoče doseči na mnogo načinov. Najpreprosteje je, če vzamemo, da je balonska opna neskončno tanka in jo obravnavamo tako, kot pogosto obravnavamo milnično opno. Napetostni tenzor take (idealizirane) opne je različen od nič samo pri  $r = r_0$  in je torej sorazmeren z  $\delta(r - r_0)$ . Komponenta  $T_{00}$  njegovega napetostnega tenzorja je sorazmerna ploščinski gostoti mase ( $\sigma$ ), krajevne od nič različne komponente pa morajo biti izotropne v tangentski ravnini opne. Napetostni tenzor opne se mora tako zapisati v obliki:

$$T_{00}^{balon} = \sigma c^2 \delta(r - r_0) \quad (\text{G.1.14})$$

$$T_{0i}^{balon} = 0 \quad (\text{G.1.15})$$

$$T_{ij}^{balon} = -\frac{1}{2} r_0 p \delta(r - r_0) \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) \quad (\text{G.1.16})$$

**Naloga G.1.4:** Izračunaj divergenco  $(T_{\mu\nu}^{plin} + T_{\mu\nu}^{balon})_{,\nu}$  in se prepričaj, da je res povsod enaka nič. (Upoštevaj, da je  $\frac{\partial \Theta(r-r_0)}{\partial x^i} = \delta(r-r_0) \frac{x_i}{r}$  in  $x^i T_{ij}^{balon} = 0$  za vsak  $r$ !)

Gravitacijsko polje, ki ga ustvarjata obe masi (plin in balon) reši enačbe (F.17), če je ustrezno umeritvenemu pogoju (F.16). Enačbe (F.17) rešujemo po (kartezičnih)

komponentah <sup>2</sup>. Upoštevamo, da ima problem visoko stopnju simetrije: vsa polja so statična in sferno simetrična. V matematičnem jeziku razumemo to drugo takole: če je  $\bar{h}_{\mu\nu}$  taka rešitev enačb polja, ki izraža sferno simetrijo, potem mora to biti tudi rešitev enačb polja v koordinatnem sistemu, ki je glede na prvotnega zavrten okrog težišča plinske krogle (koordinatnega izhodišča). Torej  $R_\mu^\lambda R_\nu^\sigma \bar{h}_{\lambda\sigma} = \bar{h}_{\mu\nu}$  (glej (D.23)), pri čemer je  $R_\mu^\lambda$  rotacijska matrika -  $R_0^\mu = 0$ ,  $R_i^k R_k^j = \delta_i^j$ . Povedano drugače, matrika metričnega tenzorja mora komutirati z rotacijskimi matrikami. To je res samo, če je matrika metričnega tenzorja linearna kombinacija enotske matrike ( $\delta_{\mu\nu}$ ), tenzorja Minkovskega ( $\eta_{\mu\nu}$ ) in matrike, ki projicira na mnogoterosti, ki jih rotacije ohranjajo, to je na koncentrične krogle s središčem v izhodišču. Zato lahko krajevni del metričnega tenzorja gotovo zapišemo v obliki:

$$\bar{h}_{ij} = f(r)\delta_{ij} + g(r)\left[\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right] \quad , \quad (\text{G.1.17})$$

krajevno-časovne komponente pa morajo biti enake nič:

$$h_{0i} = 0 \quad . \quad (\text{G.1.18})$$

Časovno-časovna komponenta  $\bar{h}_{00}$  je, kar se tiče simetrije, poljubna funkcija  $r$ .

**Naloga G.1.5:** Pokaži, da je matrika s komponentami

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \quad (\text{G.1.19})$$

projekcijska matrika (ima lastnost  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$ ), ki projicira vsak vektor v točki  $\varphi$  na tangentno ravnino krogle s središčem v izhodišču, ki gre skozi to točko. Prepričaj se tudi, da velja

$$\frac{d\mathbf{P}}{dr} = 0 \quad (\text{G.1.20})$$

**Naloga G.1.6:** Prepričaj se, da je:

$$P_{ij,j} = -\frac{2x_i}{r^2} \quad (\text{G.1.21})$$

in

$$\nabla^2 P_{ij} = \frac{4}{r^2} \left[ \delta_{ij} - \frac{3}{2} P_{ij} \right] \quad (\text{G.1.22})$$

---

<sup>2</sup>Če ne bi delali v kartezičnem koordinatnem sistemu s kartezičnimi komponentami, bi morali enačbe drugače zapisati. O tem bo govora v drugem delu.



Polje  $\bar{h}_{\mu\nu}$  razdelimo na polje znotraj balona ( $r < r_0$ ) in polje zunaj balona ( $r > r_0$ ). Za notranje polje veljajo enačbe polja (F.17) in umeritveni pogoji (F.16). Zapišemo jih v obliki:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = \kappa w_{\text{polna}} \quad (\text{G.1.23})$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{ij} = \kappa p \delta_{ij} \quad (\text{G.1.24})$$

(ker smo izbrali  $h_{i0} \equiv 0$  in so vse količine od časa neodvisne, je časovna komponenta umeritvenih pogojev avtomatično izpolnjena):

$$\bar{h}_{ij,}{}^j = 0 \quad (\text{G.1.25})$$

Za zunanje polje veljajo podobne enačbe, če postavimo  $w_{\text{polna}} = p = 0$ . Če upoštevamo, da mora imeti krajevni del metričnega tenzorja obliko (G.1.17), dobimo namesto (G.1.24):

$$\nabla^2(f(r)\mathbf{I} + g(r)\mathbf{P}) = (\nabla^2 g - \frac{6}{r^2}g)\mathbf{P} + (\frac{4g}{r^2} + \nabla^2 f)\mathbf{I} = \kappa p \mathbf{I} \quad , \quad (\text{G.1.26})$$

namesto umeritvenih pogojev (G.1.25) pa:

$$\frac{df}{dr} - \frac{2}{r}g = 0 \quad (\text{G.1.27})$$

Enačbe (G.1.26) predstavljajo dve skalarni enačbi za funkciji  $f(r)$  in  $g(r)$ . Njuna splošna rešitev v notranjosti je:

$$g(r) = ar^2 \quad \text{in} \quad f(r) = \frac{1}{6}\kappa pr^2 - \frac{2}{3}ar^2 + b \quad , \quad (\text{G.1.28})$$

v zunanosti pa:

$$g(r) = \frac{a'}{r^3} \quad \text{in} \quad f(r) = \frac{b'}{r} - \frac{2}{3}\frac{a'}{r^3} \quad (\text{G.1.29})$$

Ti dve rešitvi sta (ker smo pravilno upoštevali rotacijsko simetrijo pri nastavku (G.1.17)) združljivi s preostankom umeritvenih pogojev (G.1.27). Ko to upoštevamo, dobimo:

$$\text{znotraj : } a = \frac{1}{10}\kappa p \quad \text{zunaj : } b' = 0 \quad (\text{G.1.30})$$

Enačba (F.16) velja vedno in povsod. Zato lahko ustrezemo umeritvenemu pogoju tudi na meji med zunanostjo in notranostjo in zato sta funkciji  $f(r)$  in  $g(r)$  zvezni pri  $r = r_0$ . Odtod dobimo še enačbi za konstanti:

$$a' = \frac{1}{10}\kappa pr_0^5 \quad \text{in} \quad b = -\frac{1}{6}\kappa pr_0^2 \quad (\text{G.1.31})$$

Krajevne komponente polja so s tem popolnoma določene. Komponenta  $\bar{h}_{00}$  je zaradi simetrije odvisna samo od radialne koordinate in zaradi G.1.17 ni dodatno omejena z umeritvenimi pogoji, torej ustreza enačbi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\bar{h}_{00}}{dr} \right) = \kappa w_{\text{polna}} \Theta(r_0 - r) + \sigma c^2 \delta(r_0 - r) \quad (\text{G.1.32})$$

Če to enačbo pomnožimo z  $r^2$  in integriramo, dobimo:

$$\frac{d\bar{h}_{00}}{dr} = \begin{cases} \kappa \frac{1}{3} w_{\text{polna}} r & r < r_0 \\ \kappa \left( \frac{1}{3} w_{\text{polna}} r_0^3 + \sigma r_0^2 c^2 \right) \frac{1}{r^2} & r > r_0 \end{cases} \quad (\text{G.1.33})$$

Po enačbi D.28 in z upoštevanjem F.27 ter G.1.17, je masa znotraj polmera  $r$ , kot jo izmerimo s keplerskim poskusom:

$$m(r) = \frac{8\pi}{\kappa c^2} r^2 \frac{dh_{00}}{dr} \quad (\text{G.1.34})$$

$$= \frac{8\pi}{\kappa c^2} r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} \bar{h}_{00} + 3f(r) + 2g(r) \right) \quad (\text{G.1.35})$$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi r^3}{3} \frac{w_{\text{polna}} + 3p}{c^2} & r < r_0 \\ \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{w_{\text{polna}}}{c^2} + 4\pi \sigma r_0^2 & r > r_0 \end{cases} \quad (\text{G.1.36})$$

Masa balona, kot jo izmeri zunanji opazovalec je torej celotna polna energija plina v balonu plus masa opne ( $4\pi \sigma r_0^2$ ). Opazovalec znotraj balona, tik pod površino pa šteje k masi še  $3pV/c^2$ . Tisti, ki bi primerjal izmerjeni masi tik pod in tik nad površjem balona, bi torej pripisal balonu maso  $4\pi r_0^2(\sigma - pr_0/c^2)$ . Ali bi lahko imel dovolj velik balon tudi negativno maso?

Na primeru smo videli, da da meritev mase znotraj neke prostornine vsoto vseh mirovalnih mas v tej prostornini in energije deljene s  $c^2$  v tej prostornini. V okviru teorije gravitacije je ohranitev mase ločen zakon, ki zagotavlja ohranitev vsote lastnih mas delcev, ki sestavljajo plin in membrano. Princip ekvivalence pa pravi, da gravitacijska masa telesa tista, ki proizvaja gravitacijsko silo in tudi tista, ki nastopa v sorazmernosti med silo in pospeškom. Če ne bi bilo tako, potem vse mase ne bi enako padale v gravitacijskem polju. Videli smo, da zna teorija gravitacije mase pravilno seštevati, vendar lokalne meritve v splošnem ne razkrijejo natančno njenega nahajališča. Ohranitev mase je globalna lastnost teorije. Lastnost, da nosi maso tudi vsaka energija, lahko povzroči, da se notranja energija preko napetosti zrcali v sredstvu, ki te napetosti kompenzirajo. Notranje energije membrane torej lokalna meritev težnega pospeška ne pripiše membrani, ampak plinu, ki vzdržuje membrano v napetosti.

**Naloga G.1.7:** Milnični mehurček napihenmo do polmera  $r$ . Pokaži, da je v njem, ko mehurček doseže ravnovesje, presežek tlaka  $\Delta p = \frac{4\gamma}{r}$ ;  $\gamma$  je površinska napetost v milnični opni. Pokaži tudi, da je notranja energija mehurčka enaka  $2 \times 4\pi r^2 \times \gamma$ .

V zvezi z lokalno gravitacijsko meritvijo masne gostote smo opazili zanimivo podrobnost, da bi bilo smiselno pripisati membrani lokalno površinsko gostoto  $\sigma_{lok} = \sigma - \frac{1}{c^2}pr_0 = \sigma - \frac{4}{c^2}\gamma$  (ne pa globalno! Od daleč gledano, pripišemo membrani maso *površina*  $\times \sigma$ !). To pomeni, da lahko pri pozitivni a majhni površinski gostoti mase (če  $\sigma < 4\gamma/c^2$ ) izmerimo negativno lokalno gostoto in s tem tudi negativno (odbojno) lokalno gravitacijo. Da bi bila taka membrana res čudna, kaže tudi hitrost površinskih valov na takem balonu  $c_s^2 = \frac{2\gamma}{\sigma} = \frac{c^2}{2(1 + \frac{\sigma_{lok}c^2}{4\gamma})}$ , ki bi bila ob negativnih lokalnih površinskih gostotah večja od  $c/\sqrt{2}$ .

Tudi ob tem primeru se moramo zavedati, da je naša teorija zaenkrat še nekompletna, ker med notranjimi energijami ne nastopa gravitacijska potencialna energija, čeprav bi gotovo morala; še posebej, ker se ukvarjamo s teorijo gravitacije. Napako, ki smo jo naredili, ker smo gravitacijsko energijo zanemarili, lahko ocenimo, če izračunamo kolikšen je delež gravitacijske potencialne energije v energijah, ki nastopajo v napetostnem tenzorju na desni strani (G.1.13). Vzamimo, da ima plin veliko večjo maso kot balon, potem je glavna zanemarjena energija gravitacijska potencialna energija plina v balonu, ki jo v skladu z Newtonovo gravitacijo zapišemo v obliki:

$$W_{gN} = -G \int dV \int dV' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{G.1.37})$$

Za kroglast balon, v katerem je snov porazdeljena homogeno, je gornji izraz lahko izračunati (glej npr. A. Čadez: Fizika zvezd, DMFA 1977,..), rezultat pa je:

$$W_{gN} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (\text{G.1.38})$$

( $M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$  je masa plina v balonu.) Najmanjša energija, ki smo jo še upoštevali pri obravnavanju plina v balonu, je energija povezana s tlakom plina, to je energija:

$$W_n = \frac{3}{2} p \frac{4\pi R^3}{3} \quad (\text{G.1.39})$$

Zato lahko sklepamo, da je naša obravnava dobra, dokler je  $W_n \gg |W_{gN}|$ , oziroma dokler je tlak v balonu veliko večji kot:

$$p \gg \frac{2}{5} G \frac{M\rho}{r} = \frac{2}{5} \frac{GM}{r^2} \rho R \quad (\text{G.1.40})$$

Zadnji izraz je zapisan kot barometriška enačba ( $\frac{GM}{r^2}$  je težni pospešek na površini); tlak ki ga izraža je prirastek tlaka od površine do središča zaradi teže višjih plasti (do numeričnega faktorja, ki je blizu 1). Naša obravnava je torej korektna dokler je balon tako napihnjen, da je hidrostatični tlak povsod zanemarljiv gleda na dinamični tlak plina. Zvezd z dosedanjim formalizmom ne moremo obravnavati, ker jih drži skupaj izključno gravitacija. Tudi to nas sili, da skušamo zapisati napetostni tenzor, ki pripada gravitacijskemu polju. Preden pa se tega zares lotimo, je pametno nabrati še nekaj izkušenj o splošnih simetrijah in relacijah med napetostnimi tenzorji. Zato si bomo najprej ogledali tenzor vrtilne količine in napetostni tenzor elektromagnetnega polja. Izkušnja bo koristila pri zapisu gravitacijskega napetostnega tenzorja.

## 7.2 Tenzor vrtilne količine

Vrtilna količina je precej nenavaden koncept, posebej v okviru teorije gravitacije, ki naj bi bila neodvisna od koordinatnega sistema v katerem enačbe zapišemo. V vrtilni količini namreč eksplicitno nastopajo komponente radij vektorja od izbranega izhodišča, kar nikakor ni neodvisno od koordinat. Zapišimo vrtilno količino idealnega plina v prostornini  $V$  v okviru Newtonove mehanike:

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) dV \quad (\text{G.2.1})$$

Kartezične komponente gornjega so:

$$L_1 = \int_V \rho(x^2 v^3 - x^3 v^2) dV \quad L_2 = \int_V \rho(x^3 v^1 - x^1 v^3) dV \quad L_3 = \int_V \rho(x^1 v^2 - x^2 v^1) dV \quad , \quad (\text{G.2.2})$$

oziroma po (G.1.5) in upošteva je  $\rho \approx w_{\text{polna}}/c^2$  v nerelativistični limiti:

$$L_1 = \int_V \frac{1}{c} (x^2 T^{03} - x^3 T^{02}) dV \quad L_2 = \int_V \frac{1}{c} (x^3 T^{01} - x^1 T^{03}) dV \quad L_3 = \int_V \frac{1}{c} (x^1 T^{02} - x^2 T^{01}) dV \quad , \quad (\text{G.2.3})$$

Zato se zdi smiselno vpeljati tenzor gostote vrtilne količine  $l_{\mu\nu\sigma}$  kot:

$$l_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{c} [T_{\mu\nu} x_\sigma - T_{\mu\sigma} x_\nu] \quad (\text{G.2.4})$$

Za  $\mu = 0$  so gornje ravno vse komponente klasične vrtilne količine (G.2.3). Izračunajmo divergenco  $l$  po prvem indeksu:

$$l_{\mu\nu\sigma, \mu} = \frac{1}{c} [T_{\mu\nu, \mu} x_\sigma + T_{\mu\nu} \delta^\mu_\sigma - T_{\mu\sigma, \mu} x_\nu - T_{\mu\sigma} \delta^\mu_\nu] \quad (\text{G.2.5})$$

Vidimo, da je divergenca tenzorja  $l$  po prvem indeksu enaka 0, če je napetostni tenzor simetričen (če  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ) in seveda če veljajo enačbe gibanja ( $T_{\mu\nu, \nu} = 0$ ).

Zaradi (G.2.5) velja:

$$\int l_{\mu\nu\sigma, \mu} d^4x = \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} c dt \{ l^0_{\nu\sigma, 0} + l^i_{\nu\sigma, i} \} \quad (\text{G.2.6})$$

Prvi del integriramo po času, pri drugem pa uporabimo Gaussov izrek in pretvorimo divergenco v integral po površini. Tako dobimo:

$$\int_V l^0_{\nu\sigma}|_{t=t_2} dV - \int_V l^0_{\nu\sigma}|_{t=t_1} dV + \int_{t_1}^{t_2} c dt \int_S l^i_{\nu\sigma} dS_i = 0 \quad (\text{G.2.7})$$

Če je ploskev  $S$  po kateri integriramo dovolj daleč, tako da masna porazdelitev nikdar ne seže do nje, je (G.2.7) izjava o ohranitvi vrtilne količine izoliranega sistema: vrtilna količina sistema, ki jo definiramo kot:

$$L_{\mu\nu} \equiv \int_V l^0_{\mu\nu} dV \quad (\text{G.2.8})$$

se ohranja, če sistem ni v stiku z okolico, ali z drugimi besedami, če eksistira zaključena ploskev  $S$ , zunaj katere ima napetostni tenzor vrednost nič. Vidimo tudi, da je gornje sklepanje pravilno samo, če je napetostni tenzor simetričen (glej (G.2.5)). Ker verjamemo v zakon o vrtilni količini, bomo od vsakega napetostnega tenzorja vedno zahtevali simetričnost.

**Naloga G.2.1:** Pokaži, da ima v inercialnem sistemu, katerega izhodišče je v težišču sistema, tenzor vrtilne količine samo krajevne komponente različne od nič. Ta nesimetrični krajevni tenzor se ujema s tenzorjem (včasih mu rečejo aksialni vektor) vrtilne količine kot smo ga vajeni v Newtonovi mehaniki.

### 7.3 Napetostni tenzor elektromagnetnega polja

Videli smo, da mora biti divergenca napetostnega tenzorja, ki naj bo izvor gravitacije, vedno enaka nič (enačba F.12 in F.31). To je posledica umeritvene invariantnosti, oziroma preprostega dejstva, da morajo dati enačbe gibanja pravo rešitev ne glede na to, v katerem koordinatnem sistemu jih zapišemo. Po drugi strani pa smo videli ((G.1.10) - (G.1.12)), da je izjava o ničelni divergenci napetostnega tenzorja pravzaprav izjava o enačbi gibanja tistega, kar napetostni tenzor opisuje. V prejšnjem

poglavju smo se zanimali za plin in morda še za balonsko membrano, ki zna plin zadržati. O napetostnem tenzorju elektromagnetnega polja pa se lahko naučimo, če preišljujemo o kombinaciji plazme in elektromagnetnih polj, ki jih povzročijo naboji in tokovi v plazmi. V tem primeru je napetostni tenzor vsota napetostnega tenzorja za plin (idealni plin je ponavadi zelo dobra aproksimacija) in napetostnega tenzorja za elektromagnetno polje. Po F.12 mora biti njuna skupna divergenca enaka nič:

$$T_{\mu\nu, \nu} = T_{\mu\nu}^{plin, \nu} + T_{\mu\nu}^{EM, \nu} = 0 \quad (\text{G.3.1})$$

Divergenco  $T_{\mu\nu}^{plin, \nu}$  smo izračunali v G.1.9, vendar ta ni nič če sta prisotna še električno in magnetno polje. Po analogiji z Newtonovo fiziko sklepamo, da mora biti enaka (glej (G.1.12)) prostorninski gostoti elektromagnetne sile. Izraz za to zadnje dobimo na osnovi izraza za elektromagnetno silo (D.13), ki ga lahko zapišemo tudi v obliki:

$$F_{\mu} = eA_{\lambda, \mu} \dot{x}^{\lambda} - eA_{\mu, \lambda} \dot{x}^{\lambda} \quad , \quad (\text{G.3.2})$$

Gostoto sile dobimo, če nadomestimo tok ( $I^{\lambda} = e\dot{x}^{\lambda}$ ) z gostoto toka  $j^{\lambda}$ . Zato se mora (G.3.1) zapisati v obliki:

$$T_{\mu\nu}^{plin, \nu} - (A_{\lambda, \mu} - A_{\mu, \lambda}) j^{\lambda} = 0 \quad (\text{G.3.3})$$

V skladu s tem, kar smo povedali na začetku, pričakujemo, da je drugi del na nek način zapisana divergenca elektromagnetnega napetostnega tenzorja. Po drugi strani pa mora biti (G.3.3) tudi gibalna enačba za polje. Zato moramo, če hočemo v drugem delu (G.3.3) videti divergenco napetostnega tenzorja za EM polje, izraziti gostoto toka  $j^{\lambda}$  s poljem, ki ga ta tok ustvarja. To naredimo na ta način, da uporabimo enačbo gibanja za polje (D.6) in dobimo:

$$T_{\mu\nu}^{EM, \nu} = -(A_{\lambda, \mu} - A_{\mu, \lambda}) j^{\lambda} = \frac{1}{\mu_0} (A_{\lambda, \mu} - A_{\mu, \lambda}) (A^{\lambda, \nu}{}_{, \nu} - A^{\nu, \lambda}{}_{, \nu}) \quad . \quad (\text{G.3.4})$$

Da je gornje res divergenca, se prepričamo v nekaj korakih. Poglejmo izraz:

$$\begin{aligned} & [(A_{\lambda, \mu} - A_{\mu, \lambda}) (A^{\lambda, \nu}{}_{, \nu} - A^{\nu, \lambda}{}_{, \nu})]_{, \nu} = \\ & = (A_{\lambda, \mu} - A_{\mu, \lambda}) (A^{\lambda, \nu}{}_{, \nu} - A^{\nu, \lambda}{}_{, \nu}) + (A_{\lambda, \mu\nu} - A_{\mu, \lambda\nu}) (A^{\lambda, \nu} - A^{\nu, \lambda}) = \\ & = \mu_0 T_{\mu\nu}^{EM, \nu} + (A_{\lambda, \mu\nu} - A_{\mu, \lambda\nu}) (A^{\lambda, \nu} - A^{\nu, \lambda}) = \mu_0 T_{\mu\nu}^{EM, \nu} + A_{\lambda, \mu\nu} (A^{\lambda, \nu} - A^{\nu, \lambda}) \end{aligned} \quad (\text{G.3.5})$$

Drugi člen v prvem oklepaju v zadnji vrstici je simetričen glede na zamenjavo indeksov  $\nu$  in  $\lambda$ , tisto kar stoji v drugem oklepaju zadnje vrstice pa antisimetrično glede

na zamenjavo istih indeksov, zato da ta del avtomatično vrednost nič, ko seštejemo po ponavljajočih se indeksih. Zato so po zadnjem enačaju ti členi izpuščeni. Preostanek v gornjem izrazu zapišemo kot divergenco, ko se prepričamo, da velja:

$$[(A_{\lambda,\nu} - A_{\nu,\lambda})(A^{\lambda,\nu} - A^{\nu,\lambda})]_{,\mu} = 4A_{\lambda,\nu\mu}(A^{\lambda,\nu} - A^{\nu,\lambda}) \quad (\text{G.3.6})$$

Enačba (G.3.5) tako preide v obliko:

$$[(A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda})(A^{\lambda,\nu} - A^{\nu,\lambda})]_{,\nu} = \mu_0 T_{\mu\nu}^{EM}{}_{,\nu} + \frac{1}{4}[(A_{\lambda,\nu} - A_{\nu,\lambda})(A^{\lambda,\nu} - A^{\nu,\lambda})]_{,\mu} \quad , \quad (\text{G.3.7})$$

iz nje pa sledi izraz za napetostni tenzor elektromagnetnega polja:

$$\mu_0 T_{\mu\nu}^{EM} = (A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda})(A^{\lambda,\nu} - A^{\nu,\lambda}) - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}[(A_{\lambda,\sigma} - A_{\sigma,\lambda})(A^{\lambda,\sigma} - A^{\sigma,\lambda})] \quad (\text{G.3.8})$$

Hitro vidimo, da je elektromagnetni napetostni tenzor simetričen kot se spodobi in zato to polje ohranja vrtilno količino. Prav tako se lahko prepričamo, da je sled elektromagnetnega napetostnega tenzorja identično enaka nič. To pomeni naslednje: Če imamo npr. v škatli zaprto elektromagnetno polje (npr. svetlobo črnega sevanja) tako, da povzroča v njej izotropen tlak (krajevne komponente napetostnega tenzorja so  $T_{ij} = p\delta_{ij}$ ), potem je tlak  $p$  enak tretjini gostote energije polja ( $p = \frac{1}{3}T_{00}$ ) - to je seveda znan rezultat. Tudi takole lahko sklepamo: Če bi mogli narediti elektromagnetno membrano za balon o katerem je bilo govora v prejšnjem poglavju, bi morala biti njena "površinska napetost" enaka polovici površinske gostote energije. Taka membrana bi v skladu z rezultati prejšnjega poglavja ne prispevala lokalne gravitacije, hitrost zvoka na njej pa bi bila enaka hitrosti svetlobe. Tudi na ta način lahko razumemo zakaj rečemo fotonu brezmasni delec, čeprav ne smemo pozabiti, da je komponenta  $^{00}$  elektromagnetnega napetostnega tenzorja različna od nič, zato je vsako elektromagnetno polje globalno vendarle tudi izvor gravitacijskega polja.

Vidimo, da nastopajo v napetostnem tenzorju elektromagnetnega polja izključno prvi odvodi komponent polja po koordinatah, zato ga lahko izrazimo tudi s komponentami električnega in magnetnega polja. Bralec se kaj lahko prepriča, da jih lahko zapišemo tudi takole:

$$\begin{aligned} T_{00}^{EM} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right) & T_{0i}^{EM} &= -\frac{1}{\mu_0 c}(\vec{E} \times \vec{B})_i \\ T_{ij}^{EM} &= \frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) - \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0}B_i B_j \end{aligned} \quad (\text{G.3.9})$$

Komponenta  $T_{00}^{EM}$  predstavlja gostoto elektromagnetne energije,  $-cT_{0i}$  so komponente gostote energijskega toka (Poyntingovega vektorja)

## 7.4 Napetostni tenzor gravitacijskega polja

Do napetostnega tenzorja gravitacijskega polja bomo prišli podobno, kot smo prišli do elektromagnetnega napetostnega tenzorja. Opazujmo gibanje točkastega delca v gravitacijskem polju. Njegove gibalne enačbe dobimo kot Euler-Lagranževe enačbe za Lagranževo funkcijo (D.22), ki jih zapišemo v obliki:

$$m \frac{d}{d\tau} [(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{x}^\nu] - \frac{m}{2} h_{\lambda\sigma,\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma = 0 \quad , \quad (\text{G.4.1})$$

njegov napetostni tenzor pa daje enačba (F.30).

Divergenco napetostnega tenzorja za delec lahko zapišemo (v skladu z nalogo F.4) v obliki:

$$T_{(delc),\nu}^{\mu\nu}(x^\lambda) = m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \dot{\xi}^\mu(\tau) \delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau)) d\tau \quad (\text{G.4.2})$$

Tisto, kar stoji pod integralom razen funkcije  $\delta$  je odvod gibalne količine po lastnem času in sicer zapisane v komponentah z indeksi zgoraj. Integrand je na las podoben prvemu členu v enačbah gibanja (G.4.1), če smatramo, da vsebuje ta drugi časovni odvod gibalne količine po lastnem času, vendar zapisane z indeksi pri njenih komponentah spodaj, pri čemer smo indeks pri gibalni količini tokrat spustili s celotnim metričnim tenzorjem  $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  in ne samo z  $\eta_{\mu\nu}$  kot doslej. Razlika med starim in novim predpisom je seveda v okviru linearizirane gravitacijske teorije nezaznavna, ker smo do sedaj zavestno zanemarjali člene, ki so vsebovali polje v kvadratni ali še višji potenci. V skladu s tem uganemo, da bi bilo smiselno zapisati:

$$T_{\mu\nu}^{(delc),\nu}(x^\lambda) = m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} [(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{\xi}^\nu(\tau)] \delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau)) d\tau \quad (\text{G.4.3})$$

Enačbe gibanja za delec v gravitacijskem polju se morajo, skladno s umeritveno invariantnostjo, zapisati v obliki:

$$T_{\mu\nu}^{(delc),\nu} + t_{\mu\nu},{}^\nu \quad , \quad (\text{G.4.4})$$

pri čemer so  $t_{\mu\nu}$  komponente gravitacijskega napetostnega tenzorja. Če združimo (G.4.3) in (G.4.1), vidimo, da moramo divergenco gravitacijskega napetostnega tenzorja zapisati v obliki:

$$t_{\mu\nu},{}^\nu(x^\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\lambda\sigma,\mu}(x^\omega) (m/2) \dot{\xi}^\lambda \dot{\xi}^\sigma \delta^4(x^\omega - \xi^\omega(\tau)) d\tau \quad (\text{G.4.5})$$

Ko upoštevamo še (F.30) uvidimo, da lahko divergenco gravitacijskega tenzorja zapišemo z napetostnim tenzorjem delca (podobno kot smo imeli gostoto toka v



izrazu za napetostni tenzor elektromagnetnega polja):

$$t_{\mu\nu, \nu}(x^\omega) = -\frac{1}{2}h_{\lambda\sigma, \mu}(x^\omega)T_{(delec)}^{\lambda\sigma} \quad (\text{G.4.6})$$

Končni izraz za divergenco gravitacijskega napetostnega tenzorja dobimo, ko zamenjamo napetostni tenzor za delec z izrazom, za napetostni tenzor kot sledi iz gravitacijskega polja za tak delec, to je z levo stranjo enačbe (F.15) deljeno s  $\kappa$ . Delo si močno olajšamo, če izberemo umeritev (F.16), tako da lahko napetostni tenzor delca nadomestimo s preprostejšo enačbo polja (F.17). V tej umeritvi zapišemo:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu, \nu}(x^\omega) &= -\frac{1}{2\kappa}h_{\lambda\sigma, \mu}(x^\omega)\bar{h}^{\lambda\sigma, \tau}{}_{, \tau} \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\left[\bar{h}_{\lambda\sigma, \mu}(x^\omega) - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\sigma}\bar{h}_{, \mu}(x^\omega)\right]\bar{h}^{\lambda\sigma, \tau}{}_{, \tau} \end{aligned} \quad (\text{G.4.7})$$

Ta izraz ni težko zapisati v obliki divergence. Odtod pa sledi napetostni tenzor gravitacijskega polja v obliki:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa}\left[\bar{h}_{\lambda\sigma, \mu}\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{, \nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{, \mu}\bar{h}_{, \nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\bar{h}_{\lambda\sigma, \tau}\bar{h}^{\lambda\sigma, \tau} - \frac{1}{2}\bar{h}_{, \lambda}\bar{h}_{, \lambda})\right] \quad (\text{G.4.8})$$

Gravitacijski napetostni tenzor je malce nenavadna fizikalna količina. Je simetričen, kar nam pove, da gravitacijsko polje ohranja vrtilno količino, vendar pa ni invarianten glede na umeritvene transformacije. Zaradi tega temu "tenzorju" raje rečejo gravitacijski (napetostni) psevdotenzor. Veliko polemike je bilo v literaturi o tem, kaj je "pravi" gravitacijski napetostni tenzor in zakaj ni umeritveno invarianten. Kar nekaj pomembnih fizikov je definiralo gravitacijske napetostne tenzorje v različnih umeritvah, ki nosijo njihova imena (Landau, Weinberg, Penrose-Neumann ...). Različni gravitacijski psevdotenzorji dajejo različne rezultate za gostoto energije v konkretnih primerih, vendar se ujemajo v izjavah o celotni gravitacijski energiji konkretnih gravitacijskih polj. Odkod razlike v pogledu si lahko v grobem pojasnimo, če razmišljamo o pomenu energije v fiziki. V klasični mehaniki smo spoznali energijo kot abstrakten pojem - kot funkcijo dinamičnih spremenljivk, ki generira translacijo v času. Energija se ohranja, če ni eksplicitno odvisna od časa. V tem kontekstu torej energija nima kategorične nalepke, ampak jo lahko razumemo le kot lastnost algebrajske strukture gibalnih enačb. Ključna lastnost, ki zagotavlja ohranitev energije pa je, da v enačbah gibanja čas ne nastopa eksplicitno. Če prostor te lastnosti nima ali je ne prepoznamo, potem ohranitev energije pač ni avtomatično izpolnjena, vsaj ne za sistem, ki ne obravnava sprememb prostora kot integralni del sprememb dinamičnega sistema. Ker je prostor, kot ga definira teorija gravitacije,

dinamičen in so njegove lastnosti v splošnem eksplicitno funkcije časa, gravitacijska energija ali katerakoli druga energija ni avtomatično ohranjena količina. Če pa se spremembe dogajajo le v omejenem prostoru v bližini izoliranih velikih mas, lahko govorimo v veliki oddaljenosti od njih o od časa neodvisnem prostoru in zato tudi o integralu energije po dinamičnem delu prostora. Različni napetostni tenzorji morajo dati v takih primerih enako celotno energijo izoliranega sistema, ni pa potrebno, da bi se ujemali v predvidevanjih o lokaciji energije, ker tam, kjer je prostor od časa odvisen, lokacije energije pač ne moremo natančno določiti kot smo npr. že spoznali v primeru balona s plinom.

Poučno je izračunati gravitacijsko energijo izolirane statične porazdelitve mas, na primer gravitacijsko energijo plina v balonu, ki smo ga obravnavali v enem prejšnjih poglavij. Tam smo videli, da se gravitacijski tenzor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  izraža s tremi funkcijami radialne koordinate, ki smo jih označili s  $\bar{h}_{00}$ ,  $f$  in  $g$ . Po G.1.35 lahko zapišemo:

$$\frac{d\bar{h}_{00}}{dr} \equiv \frac{d\psi}{dr} = \frac{\kappa c^2}{4\pi r^2} m(r) - \frac{d}{dr} (6f(r) + 4g(r)) \quad (\text{G.4.9})$$

Pri ne pregostih balonih je masni člen bistveno večji od členov  $f$  in  $g$ , zato lahko zadnja dva pri računu gravitacijskega napetostnega tenzorja zanemarimo. Tako poenostavljeni tenzor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  ima od nič različno samo komponento  $_{00}$ , ki smo jo zgoraj zaradi preglednejše pisave označili s  $\psi(r)$ . Ko to vstavimo v G.4.8, dobimo po nekaj vrsticah gravitacijski napetostni tenzor v obliki:

$$t_{00}(r) = -\frac{1}{8\kappa} (\psi'(r))^2 \quad (\text{G.4.10})$$

$$t_{0i}(r) = 0 \quad (\text{G.4.11})$$

$$t_{ij}(r) = -\frac{1}{8\kappa} (\psi'(r))^2 [\delta_{ij} - 2P_{ij}] \quad (\text{G.4.12})$$

Sedaj se moramo ozreti nazaj na enačbe polja F.28 in na identiteto F.31. Ob tehtanju balona smo namreč spoznali, da mora biti vsebovano v izvoru gravitacijskega polja vse, kar lahko ustvarja tako ali drugačno energijo, torej tudi napetostni tenzor samega gravitacijskega polja. Na desni strani enačb F.28 mora stati vsota:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{\text{plin}} + t_{\alpha\beta}. \quad (\text{G.4.13})$$

S tem smo povedali, da morajo biti prave enačbe gravitacijskega polja nelinierne, saj kvadrat polja ustvarja dodatno napetost, ki spremeni polje. Dokler je polje tako šibko kot je bilo pri napihnjenem balonu, smo lahko prispevek lastne gravitacije zanemarili. Pri tako velikem kupu plina, kot je npr. zvezda, pa to ne pride v poštev,

saj je gravitacija edina, ki drži plin skupaj. Enačba gibanja, oziroma ravnovesne enačbe za sferno simetrično zvezdo so torej:

$$T_{\alpha\beta}^{\text{plin},\beta} + t_{\alpha\beta},^{\beta} = 0. \quad (\text{G.4.14})$$

Ker so vse komponente napetostnega tenzorja v tem primeru od časa neodvisne in so vse komponente  $T_{0i}$  enake nič, se gornje enačbe reducirajo na:

$$T_{ik}^{\text{plin},k} + t_{ik},^k = 0 \quad (\text{G.4.15})$$

$$\delta_{ik} p(r),^k - \frac{1}{4\kappa} \psi'(r) \psi'(r),_i + \frac{1}{4\kappa} (\psi'(r))^2 P_{ik},^k = 0 \quad (\text{G.4.16})$$

$$\frac{dp}{dr} - \frac{1}{4\kappa} \frac{\psi'(r)}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \psi'(r)) = 0 \quad (\text{G.4.17})$$

Ko upoštevamo G.4.9, F.27 in G.1.33 ter  $w_{\text{polna}} \approx \rho c^2$  ugotovimo, da G.4.17 preide v:

$$\frac{dp}{dr} + G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} = 0, \quad (\text{G.4.18})$$

kar spoznamo za enačbo hidrostatičnega ravnovesja.

## 7.5 Gravitacijski valovi

Do sedaj smo spoznali skoraj popolno paralelnost elektromagnetne in gravitacijske teorije. Zato je upravičeno pričakovati, da se ta paralelnost razteza tudi na področje valovnega razširjanja polj. Kot ima homogeni del enačb (D.7) (če postavimo  $j_\lambda = 0$ ) za rešitve ravne valove, dobimo podobne rešitve za homogeni del enačb (F.17). Gravitacijsko polje ravnega gravitacijskega vala lahko torej zapišemo v obliki:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{R}(e_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \quad , \quad (\text{G.5.1})$$

pri čemer so  $e_{\mu\nu}$  (konstantne) komponente polarizacijskega tenzorja gravitacijskega vala,  $\mathcal{R}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  pa stoji za  $\cos(k_\lambda x^\lambda)$ , pri čemer je  $\mathbf{k}$  valovni vektor ravnega gravitacijskega vala. Tenzor  $\bar{h}_{\mu\nu}$  mora ustrezati še umeritvenemu pogoju (F.16), zato mora biti polarizacijski tenzor ortogonalen na valovni vektor, to je:

$$e_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (\text{G.5.2})$$

Opazujmo gravitacijski val, ki se razširja v smeri osi  $z$ . Valovni vektor  $k^\mu$  ima komponente  $k\{1, 0, 0, 1\}$ <sup>3</sup>, polarizacijski tenzor, ki ustreza gornjim pogojem pa ima

---

<sup>3</sup>Vrednost  $k$  brez škode v nadalnjem postavimo na 1.

v splošnem 10-4=6 neodvisnih konstant in ga lahko zapišemo v obliki:

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 & a & b & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & b & c & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_0 & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.5.3})$$

Vendar opazimo, da lahko kljub vztrajanju pri umeritvenemu pogoju (F.16) ponovno umerimo gravitacijsko polje z vektorskim poljem oblike (enačba (E.31)):

$$\xi_\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(iV_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \quad (\text{G.5.4})$$

pri čemer so  $V_\mu$  poljubne konstantne komponente umeritvenega polja (ki ohranja pogoj (F.16)!). Po E.31 in z upoštevanjem F.14, so nove komponente polarizacijskega tenzorja:

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} - k_\mu V_\nu - V^\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} k^\lambda V_\lambda \quad (\text{G.5.5})$$

Če izberemo za komponente

$V_\mu = \{\frac{1}{4}(a+c+2\varepsilon_0), \varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_0 + \frac{1}{4}(a+c+2\varepsilon_0)\}$ , dobimo zelo preprost a ekvivalenten polarizacijski tenzor, ki je ortogonalen tudi na hitrost mirujočega opazovalca in je brez sledi:

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a-c}{2} & b & 0 \\ 0 & b & -\frac{a-c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.5.6})$$

Tako umeritev polja gravitacijskega vala imenujemo transverzhalno brezsledno umeritev ( $TT$  umeritev), postopek od G.5.3 do G.5.6 pa  $TT$  redukcijo.

**Naloga G.5.1:** Pokaži, da ponovna umeritev gravitacijskega polja s poljem iz enačbe (G.5.4) ne spremi divergence tenzorja  $\bar{h}_{\mu\nu}$  in poišči tisti vektor  $V$ , ki pripelje do transverzhalne brezsledne umeritve.

$TT$  redukcija je preprosta za gravitacijski val, ki se razširja vzdolž ene od koordinatnih osi, naredimo pa jo lahko tudi za val, ki se razširja v poljubni smeri, če gornje postopke zapišemo v obliki, ki ni odvisna od koordinat. Ker je  $TT$  umerjeni polarizacijski tenzor ortogonalen na valovni vektor in na časovno usmerjeni vektor, je ortogonalen tudi na časovno usmerjeni vektor in na  $\vec{k}$ , ki predstavlja krajevni del vektorja  $k$ .  $TT$  umeritev torej projicira na ravnino, ki je pravokotna na vektorja

$U = \{1, 0, 0, 0\}$  in  $\bar{k} = \{0, 0, 0, 1\}$ . Operator, ki projicira tenzorje v to ravnino je:

$$P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.5.7})$$

$TT$  redukcijo pa lahko z njim zapišemo v obliki:

$$\underline{\underline{e}}^{TT} = P_{TT} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot P_{TT} - \frac{1}{2} P_{TT} \text{Tr} (P_{TT} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot P_{TT}) //, \quad (\text{G.5.8})$$

pri čemer  $\text{Tr}A$  označuje sled tenzorja  $A$ . Operator  $P_{TT}$  lahko v splošnem zapišemo v obliki:

$$P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ 0 & n_y n_x & n_y n_y & n_y n_z \\ 0 & n_z n_x & n_z n_y & n_z n_z \end{pmatrix}, \quad (\text{G.5.9})$$

pri čemer so  $n_i$  komponente enotskega vektorja  $\hat{n}$  v smeri  $\vec{k} (= k\hat{n})$ .

**Naloga G.5.2:** Pokaži, da je  $P_{TT}$  res projektor, to je  $P_{TT} = P_{TT} \cdot P_{TT}$ . Z eksplinitnim računom se prepričaj, da prevede operacija G.5.8 polarizacijski tenzor G.5.3 v G.5.6.

Vidimo, da transverzalno brezsledna redukcija vedno uniči časovno-časovne in časovno krajevne komponente potencialov  $h_{\mu\nu}$ , zato je rezultat za amplitudi gravitacijskega vala neodvisen od uničenih potencialov. Relevantne komponente v transverzalno brezsledni umeritvi dobimo torej samo iz krajevnega dela potencialov, to je iz 3-tenzorja  $h^{(3)} \rightarrow h_{ij}$ . Tridimenzionalna projekcija  $TT$  redukcije G.5.8 se torej zapiše v obliki:

$$\underline{\underline{h}}_{TT}^{(3)} = P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{h}}^{(3)} \cdot P_n^{(3)} - \frac{1}{2} P_n^{(3)} \text{Tr} \left( P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{h}}^{(3)} \cdot P_n^{(3)} \right), \quad (\text{G.5.10})$$

pri čemer je  $P_n^{(3)} = I^{(3)} - \hat{n}\hat{n}$  krajevni del projektorja G.5.9,  $I^{(3)}$  pa je enotski tenzor v treh dimenzijah. Ni težko pokazati, da je gornje neodvisno od sledi tenzorja  $h^{(3)}$ , zato lahko vpeljemo brezsledni del:

$$q_{ij}^{(3)} = h_{ij}^{(3)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr}[h^{(3)}], \quad (\text{G.5.11})$$

s katerim se G.5.10 zapiše v obliki:

$$\underline{\underline{h}}_{TT}^{(3)} = P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{q}}^{(3)} \cdot P_n^{(3)} - \frac{1}{2} P_n^{(3)} \text{Tr} \left( P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{q}}^{(3)} \cdot P_n^{(3)} \right) \quad (\text{G.5.12})$$

**Naloga G.5.3:** Pokaži, da sta izraza G.5.10 in G.5.12 ekvivalentna.

Spoznali smo, da lahko za poljubno usmerjen gravitacijski val vedno najdemo  $TT$  umeritev in vedno si lahko izberemo tak koordinatni sistem, da se val razširja samo v smeri osi  $z$ . Polarizacijski tenzor vala ima samo dve neodvisni komponenti in poteciale takega val navadno zapišemo v  $TT$  umeritvi v obliki:

$$[h_{\mu\nu}] = \mathcal{R} \left( a_+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} + a_\times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (\text{G.5.13})$$

Odtod sledi, da ima gravitacijski val dve polarizaciji ”+” in ” $\times$ ”. Če sta amplitudi obeh polarizacij enaki, fazi pa se razlikujeta za  $\pm\frac{\pi}{4}$  pa pridemo do desno in levosučno polariziranega gravitacijskega vala, podobno kot pri svetlobi.

Gostoto energijskega toka, ki jo nosi gravitacijski val ( $\mathcal{F}_{GV}$ ) dobimo, če vstavimo G.5.13 v G.4.8. Rezultat je:

$$\mathcal{F}_{GV} = \frac{\pi}{8} \frac{c^5}{G\lambda^2} (|a_+|^2 + |a_\times|^2) \quad (\text{G.5.14})$$

Z upoštevanjem G.5.6, G.5.13 in G.5.1 lahko to zapišemo še v oblikah:

$$\mathcal{F}_{GV} = \frac{\pi}{8} \frac{c^5}{G\lambda^2} \text{Tr} (\underline{\underline{e}}^{TT} \cdot \underline{\underline{e}}^{*TT}) \quad (\text{G.5.15})$$

$$\mathcal{F}_{GV} = \frac{c^3}{32\pi G} \text{Tr} (\dot{\underline{\underline{h}}}^{TT} \cdot \dot{\underline{\underline{h}}}^{*TT}), \quad (\text{G.5.16})$$

pri čemer smo označili odvajanje po času s piko, kompleksno konjugiranje pa z zvezdico. Amplituda  $a_0$  ne nastopa v napetostnem tenzorju gravitacije, predstavlja samo valujočo kordinatno transformacijo, zato lahko to amplitudo brez škode zane-marimo ter končno zapišemo gravitacijski tenzor ravnega gravitacijskega vala, ki se širi v smeri osi  $z$  v obliki, ki jo imenujemo transverzhalno-brezsledna:

Izraz  $P_0 = \frac{c^5}{G}$  v G.5.16 predstavlja moč  $P_0 = 3.62 \times 10^{52}$  vatov, to je strahovita moč, večja od izseva vseh galaksij v vesolju ali moč, ki bi jo dobili, če bi se vsa masa Sonca v približno petih mikrosekundah pretvorila v energijo. Velikost  $P_0$  v G.5.16 nam takoj pove, da morajo biti amplitude gravitacijskih valov res zelo, zelo majhne. To je seveda razlog, da gravitacijskih valov še nismo neposredno izmerili, čeprav delujejo že vsaj trije veliki detektorji (LIGO - 2 detektorja in TAMA), ki skušajo zaznati gravitacijske valove, ki bi jih oddali dve nevtronski zvezdi, ki se na koncu svoje poti zlijeta v eno samo črno luknjo. Današnji detektorji bi tak dogodek zaznali, če

bi se zgodil na razdalji manjši od približno  $250Mpc$ . Zaenkrat je odsotnost detekcije še v skladu s pričakovanji, saj zajema polmer  $250Mpc$  precejšnjo prostornino, da bi v njem smeli pričakovati zaznavno verjetnost za tak dogodek.

Pomembne izvore gravitacijskih valov lahko iščemo samo med kompaktnimi objekti - nevtronskimi zvezdami in črnimi luknjami, to je v sistemih, ki imajo zelo kratke orbitalne periode. V naši Galaksiji poznamo vrsto kratkoperiodičnih dvojnih sistemov (najkrajša znana perioda je dvojnega sistema je komaj ura in pol) in šest med njimi je takih, ki bodo zaradi sevanja gravitacijskih valov v manj kot milijardi let izgubili toliko orbitalne energije, da se bosta zvezdi dotaknili in se v končnem vrtincu združili v eno. Take dogodke želijo zaznati z detektorjema LIGO in TAMA.

**Naloga G.5.4:** Kako oddaljene združitve bi morali biti detektorji LIGO in TAMA sposobni zaznati, da bi lahko pričakovali deset signalov na leto, če je povprečna razdalja med galaksijami v vesolju  $2.5Mpc$ ? Potrebne podatke najdeš v prilogi "Seznam pulzarjev v dvojnih sistemih".

Moč, ki jo seva dvojni sistem v obliki gravitacijskih valov izračunamo podobno kot izračunamo moč, ki jo izseva npr. krožeč par pozitivnega in negativnega naboja, vendar je v primeru gravitacijskih valov račun nekoliko bolj zapleten zaradi tenzorske narave gravitacijskega polja. Koraki so naslednji:

- Gravitacijske potenciale izračunamo tako, da izrazimo rešitve enačb F.17 z retardirano Greenovo funkcijo v obliki:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'(t_{\text{ret}})|} d^3\vec{r}', \quad (\text{G.5.17})$$

pri čemer je  $t_{\text{ret}} = t - |\vec{r} - \vec{r}'(t_{\text{ret}})|/c$ . V veliki oddaljenosti od mas, ki generirajo gravitacijske valove so vsi potenciali samo funkcije  $t - r$ , zato mora sledi iz umeritvenega pogoja, da je  $h_{\mu\nu}$  ortogonalen na četverec  $\{1, \hat{n}\}$ , pri čemer je  $\hat{n}$  enotski vektor v radialni smeri.

- Zanima nas samo tisti del potencialov, ki padajo sorazmerno z razdaljo, saj komponente, ki padajo hitreje, ne prispevajo k izsevani moči kot jo merimo v zelo veliki oddaljenosti. Zgornji izraz razvijemo po  $\vec{r}'$  in ohranimo samo prvi člen:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{\kappa}{4\pi r} \int T_{\mu\nu}(\vec{r}', t_{\text{ret}}) d^3\vec{r}'. \quad (\text{G.5.18})$$

Potrebujemo torej samo integrale napetostnega tenzorja krožečih mas po prostornini. Integral največje komponente 00 je v prvem približku sorazmen masi-energiji dvozvezdja, ki se ohranja (zmanjšuje se le zaradi sevanja gravitacijskih valov), zato rezultat vsaj v prvem približku ne bo odvisen od časa. Podobno

je s komponentami  $0i$ , ki v prvem približku predstavljajo ohranjeno gibalno količino težišča, zato tudi te komponente v prvem približku nič ne prispevajo. Torej so krajevne komponente  $ij$  prve, ki lahko nekaj dajo; na podlagi prejšnje razprave o ravnih valovih je to tudi ravno prav, saj samo brezsledni krajevni del  $h_{\mu\nu}$  določa gostoto energijskega toka. Njihov prispevek izračunamo z naslednjim trikom: Vemo, da je divergenca napetostnega tenzorja enaka nič, zato velja:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{2} [(x^i T^{\nu j})_{,\nu} + (x^i T^{j\nu})_{,\nu}] \\ &= \frac{1}{2} [(x^i T^{0j})_{,0} + (x^i T^{kj})_{,k} + (x^j T^{0i})_{,0} + (x^j T^{ki})_{,k}] \end{aligned} \quad (\text{G.5.19})$$

Tretji in četrti člen zgoraj predstavljata 3-divergenco. Pri integraciji po prostornini se po Gaussovem izreku prevedata na ploskovni integral oblike  $\int (x^i T^{kj}) dS_k$ , ki pa gre proti nič ker se s ploskvijo, ki objame mase, teh ne dotaknemo in je napetostni tenzor na njej enak nič, gravitacijski napetostni psevdotenzor pa zanemarljivo majhen. Zato lahko zapišemo:

$$\int T^{ij} d^3\vec{r}' = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int (x^i T^{0j} + x^j T^{0i}) d^3\vec{r}' \quad (\text{G.5.20})$$

Ohranitveni zakon  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$  zagotavlja še identiteto:

$$\begin{aligned} x^i T^{0j} + x^j T^{0i} &= (x^i x^j T^{\mu 0})_{,\mu} \\ &= (x^i x^j T^{00})_{,0} + (x^i x^j T^{k0})_{,k} \end{aligned} \quad (\text{G.5.21})$$

Drugi člen je zopet 3-divergenca, katere prispevek podobno kot zgoraj izgine po integraciji po prostornini. Ko vstavimo G.5.21 v G.5.20 in upoštevamo da je v limiti šibkega gravitacijskega polja od vseh prispevkov k  $T^{00}$  daleč največji  $\rho c^2$ , dobimo:

$$\bar{h}_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{8\pi r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int x'^j x'^i \rho d^3\vec{r}' \quad (\text{G.5.22})$$

$$\bar{h}_{ij}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{8\pi r} \ddot{\mathcal{Q}}_{ij} \quad , \quad (\text{G.5.23})$$

Brezsledni tenzor  $q_{ij}$  zapišemo takole:

$$q_{ij}^{(3)}(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{8\pi r} \ddot{\mathcal{Q}}_{ij} \quad , \quad (\text{G.5.24})$$



pri čemer so komponente tenzorjev

$$\mathcal{T}_{ij}(t_{\text{ret}}) = \int x'^j x'^i \rho d^3 \vec{r}' \quad (\text{G.5.25})$$

$$\mathcal{Q}_{ij}(t_{\text{ret}}) = \int \left( x'^j x'^i - \delta^{ij} r'^2 \right) \rho d^3 \vec{r}'$$

odvisne samo od retardiranega časa.

- Tako napisani gravitacijski tenzor je pri vsakem opazovališču ortogonalen na valovni vektor, ki kaže v radialni smeri ( $\vec{k} = k \{1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\}$ ). Gostoto energijskega toka gravitacijskih valov vzdolž izbrane smeri  $\hat{n}$  dobimo iz G.5.16, pri čemer upoštevamo, da se  $\underline{\underline{h}}_{TT}$  izraža z G.5.12, pri čemer projicira  $P_n^{(3)}$  na ravnino pravokotno na smer  $\hat{n}$ . Če upoštevamo identitete ( $A$  je simetrični tenzor):

$$P_n^{(3)} \cdot P_n^{(3)} = P_n^{(3)} \quad (\text{G.5.26})$$

$$\text{Tr}(P_n^{(3)}) = 2 \quad (\text{G.5.27})$$

$$\text{Tr}(P_n^{(3)} \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot P_n^{(3)}), \quad (\text{G.5.28})$$

lahko G.5.16 zapišemo v obliki:

$$\mathcal{F}_{GV} = \frac{c^3}{32\pi G} \left( \text{Tr} \left( P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}^{TT} \cdot P_n^{(3)} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}^{*TT} \right) - \frac{1}{2} |\text{Tr}(P_n^{(3)} \underline{\underline{\dot{q}}})|^2 \right) \quad (\text{G.5.29})$$

Celotno izsevano moč dobimo tako, da G.5.29 integriramo po površini oddaljene krogle, oziroma množimo z  $r^2$  in integriramo po prostorskem kotu. Glede na to, da je od smeri  $\hat{n}$  odvisen samo projektor  $P_n^{(3)}$ , je pametno izbrati koordinatni sistem v katerem je tenzor  $\ddot{\mathcal{Q}}$  diagonalen. Integracijo lahko hitro izvršimo (Mathematica je lahko v pomoč) in ko izrazimo še  $\kappa$  z  $G$  dobimo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GV} &= \frac{G}{5c^5} \text{Tr} \left( \ddot{\mathcal{Q}} \cdot \ddot{\mathcal{Q}} \right) \\ &= \frac{1}{5P_0} \text{Tr} \left( \ddot{\mathcal{Q}} \cdot \ddot{\mathcal{Q}} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.5.30})$$

Za konec izračunajmo moč sevanja gravitacijskih valov, ki jo seva dvozvezdje z zvezdama mas  $m_1$  in  $m_2$ , ki krožita na razdalji  $a$ ; prva zvezda je na mestu  $\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} a \hat{\alpha}$ , druga pa pri  $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} a \hat{\alpha}$ , pri čemer je  $\hat{\alpha}$  enotski vektor vzdolž  $a$ . Za ravnino kroženja izberemo ravnino  $x - y$ , tako da ima  $\hat{\alpha}$  komponente  $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\}$ . Tenzor  $\mathcal{Q}$  tako zapišemo v obliki:

$$\mathcal{Q} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \left( \hat{\alpha} \hat{\alpha} - \frac{1}{3} I^{(3)} \right) \quad (\text{G.5.31})$$

Vpeljemo celotno maso sistema  $M = m_1 + m_2$  in reducirano maso  $\mu = m_1 m_2 / M$  in gornje vstavimo v G.5.30, upoštevamo še Keplerjev zakon ( $\omega^2 a^3 = GM$ ) in dobimo:

$$\mathcal{L}_{GV} = \frac{32G}{5c^5} a^4 \mu^2 \omega^6 \quad (\text{G.5.32})$$

$$= \frac{32G^4 M^3 \mu^2}{5a^5 c^5} \quad (\text{G.5.33})$$

$$= \frac{32}{5} P_0 \left( \frac{\mu}{M} \right)^2 \left( \frac{R_g}{a} \right)^5 \quad (\text{G.5.34})$$

V zadnji obliki izraza smo vpeljali gravitacijski radij  $R_g = GM/c^2$ . Ta oblika je posebej zanimiva, ker nastopa  $P_0$  v števcu. Izsevana moč gravitacijskih valov je lahko tudi zelo velika, če preostala člena nista premajhna kot pri večini navadnih dvozvezdij, kjer je orbitalna hitrost le skromnih nekaj ali nekaj 10km/s<sup>4</sup>;  $R_g/a$  je približno kvadrat orbitalne hitrosti v enotah hitrosti svetlobe. Pri zelo kompaktnih dvojnih sistemih, npr. pri dvojnih nevtronskih zvezdah ali pri parih nevtronska zvezda-črna luknja, pa so orbitalne hitrosti lahko primerljive s hitrostjo svetlobe, zato taki pari ne morejo biti dolgoživi in zvezdi se zelo hitro spiralita druga v drugo in naredita bolj masivno črno luknjo. Videti take pojave je ena glavnih motivacij za gradnjo detektorjev gravitacijskih valov.

## 8 Gibanje planeta okrog sonca

V enačbah 6.11, 6.15 in 6.16 smo zapisali komponente gravitacijskega tenzorja za polje okrog "točkaste" mase  $M$ . Tukaj bomo nekaj več povedali o orbitah delcev z zelo majhno maso ( $m \ll M$ ), ki se gibljejo v gravitacijskem polju mase  $M$ . Lagranževa funkcija za gibanje delca  $m$  v polju mase  $M$  je potemtakem v skladu s 4.15:

$$L = -\frac{m}{2} \dot{x}^0{}^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) + \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (\text{H.1})$$

Najprej velja poiskati konstante gibanja. Pokazali smo že, da je sama Lagranževa funkcija ena od njih (Naloga 4.2). Ker  $x^0$  ne nastopa ekslicitno v Lagranževi funkciji, je tudi impulz prirejen času, oziroma koordinati  $x^0$ , konstanta gibanja. Opazimo še, da je Lagranževa funkcija odvisna samo od radialne koordinate ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ), zato pričakujemo, da se ohranja tudi vrtilna količina. Konstruirajmo vrtilno količino

---

<sup>4</sup>Pri dvozvezdju Sonce-Zemlja je npr.  $R_g/a = 10^{-8}$ ,  $\mu/M = 1/300000$ , tako da je  $\mathcal{L}_{GV}$  le skromnih 260 vatov.

tako, kot smo navajeni v nerelativistični fiziki in pokažimo, da je res konstantna! Najprej zapišemo komponente gibalne količine (samo krajevne komponente):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = m \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{x}^j \eta_{ji} \quad (\text{H.2})$$

Uredimo jih v 3-vektor:

$$\vec{p} = m \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{\vec{r}} \quad (\text{H.3})$$

Po gibalnih enačbah 3.3 je v našem primeru:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^i} \quad , \quad (\text{H.4})$$

oziroma v vektorski obliki:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{H.5})$$

Tri-vektor vrtilne količine definiramo tako kot smo vajeni:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{H.6})$$

Odvod vrtilne količine  $\vec{l}$  po lastnem času je:

$$\frac{d\vec{l}}{d\tau} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = 0 \quad (\text{H.7})$$

Prvi člen za enačajem je nič, ker je gibalna količina  $\vec{p}$  po 8.2(a) vzporedna s hitrostjo ( $\dot{\vec{r}}$ ), drugi pa je nič, ker je odvod gibalne količine po 8.3(a) vzporeden  $\vec{r}$ . Ker se torej vrtilna količina ohranja, leži orbita v ravnini pravokotni na vrtilno količino. Koordinatni sistem lahko vedno izberemo tako, da leži orbita v ravnini  $x - y$ , vrtilna količina pa kaže v smer osi  $z$ . V ravnini  $x - y$  ( $z = 0$ ) je ugodno izbrati polarni koordinati  $r$  in  $\varphi$ , tako da je:

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \quad \text{in} \quad z = 0 \quad (\text{H.8})$$

Potem je:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (\text{H.9})$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (\text{H.10})$$

Tako je:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (\text{H.11})$$

Vrtilna količina pa ima komponente:

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_z \end{pmatrix} = m\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \quad (\text{H.12})$$

Ker sta  $z$  in  $\dot{z}$  enaka 0, je očitno samo tretja komponenta vrtilne količine od nič različna. Ko upoštevamo 8.7, dobimo iz 8.9 za to komponento vrednost:

$$|\vec{l}| = l = l_z = m\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)r^2\dot{\varphi} \quad (\text{H.13})$$

Našli smo pet konstant gibanja:

$$L = -\frac{1}{2}mc^2 \quad p_0 = \frac{\partial L}{\partial x^0} = mx^0\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \equiv mc\gamma \quad (\text{H.14})$$

in

$$l_x = 0 \quad , \quad l_y = 0 \quad \text{in} \quad l_z = l = m\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)r^2\dot{\varphi} \quad (\text{H.15})$$

Teh pet prvih integralov nadomesti gibalne enačbe in nudi enostavno pot do kompletne rešitve dinamičnega problema.

Preden se lotimo nadaljnega reševanja problema še kratka opomba. Masa izvora gravitacijskega polja ( $M$ ) nastopa vedno v kombinaciji

$$M^* = \frac{GM}{c^2} \quad (\text{H.16})$$

$M^*$  merimo v metrih ( $[M^*] = [\frac{Nm^2}{kg^2}][kg][\frac{s^2}{m^2}] = [m]$ ) in imenujemo gravitacijski polmer ustrezne mase.  $M^*$  je prav tako dobro merilo za količino snovi kot  $M$ , le da nismo vajeni meriti količine snovi v metrih, ker se do nedavnega pač nismo zavedali zveze med maso in geometrijo. Zakaj nam je ta zveza tako dolgo ostala skrita, pokaže ravno razmerje velikosti gravitacijskih polmerov in dejanskih polmerov znanih mas. Npr. masa Sonca je  $2 \times 10^{30}kg$ , njegov polmer pa  $700.000km$ . Gravitacijski polmer Sonca je le  $1.5km$  (natančneje  $1.477km$ ) in je torej skoraj  $500.000$  krat manjši od polmera. Gravitacijski polmer Zemlje je relativno še manjši, saj je približno  $5mm$  kolikor znaša, več kot milijardokrat manj od polmera Zemlje ( $\approx 6400km$ ). Masa  $1.3 \times 10^{12}kg$  ima gravitacijski polmer enak velikosti protona  $10^{-15}m$ . Tolikšna masa snovi s tipično gostoto apnenca pa bi predstavljala kar lepo goro s prostornino  $\frac{1}{2}km^3$ . Torej so vse naše izkušnje z gravitacijo omejene na področja v prostoru, kjer je  $\frac{M^*}{r} \ll 1$ . To dejstvo velja upoštevati, ko primerjamo Keplerjeve zakone z ustreznimi posplošitvami teorije gravitacije.

Zapišimo najprej enačbo orbite, to je enačbo, ki pove odvisnost radialne koordinate  $r$  od polarnega kota  $\varphi$  ( $r = r(\varphi)$ ). Do nje pridemo po naslednjih korakih:

a) če smatramo, da je  $r = r(\varphi)$ , je:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \equiv r' \dot{\varphi} \quad (\text{H.17})$$

b)  $\dot{\varphi}$  izrazimo z  $r$  in  $l$  po 8.10:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2(1 + \frac{2M^*}{r})} \quad (\text{H.18})$$

Tako je po a):

$$\dot{r} = r' \frac{l}{mr^2(1 + \frac{2M^*}{r})} = - \left( \frac{l}{M^* m} \right) \frac{1}{1 + \frac{2M^*}{r}} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{M^*}{r} \right) \quad (\text{H.19})$$

c) Kar ponuja se nova spremenljivka:

$$u = \frac{M^*}{r} \quad , \quad (\text{H.20})$$

katere vrednost je v primerih, ki nas trenutno zanimajo zelo, zelo majhna.

d) Upoštevamo, da sta  $L$  in  $\gamma$  (glej 8.11) konstanti gibanja in izpišemo 8.1 z upoštevanjem 8.8 ter 8.13, 8.14 in 8.15. Tako dobimo enačbo orbite v obliki (pokrajšamo  $\frac{1}{2}mc^2$  in množimo z  $(1 + 2u)$ ):

$$-(1 + 2u) = -\gamma^2 \frac{1 + 2u}{1 - 2u} + \left( \frac{l}{mM^*c} \right)^2 (u'^2 + u^2) \quad (\text{H.21})$$

Konstanta  $\gamma$  povezuje lastni čas s koordinatnim časom (glej 8.11), zato mora biti, vsaj za tiste trajektorije, ki se gibljejo v šibkem polju, zelo blizu vrednosti 1. Namesto  $\gamma^2$  bomo zato zapisali:

$$\gamma^2 = 1 - 2u_1 \quad (\text{H.22})$$

Pri čemer je konstanta  $u_1$  po absolutni vrednosti veliko manjša od 1. Ker je tudi vrednost spremenljivke  $u$  na vseh delih orbite veliko manjša od 1, smemo člen  $\frac{1+2u}{1-2u}$  razviti v polinom po potencah  $u$ . Majhni količini sta tako  $u$  in  $u_1$ . Pokazali bomo, da imata enak velikostni red, če orbite niso preveč sploščene. Preden zapišemo enačbo 8.17 v novi preobleki, vpeljemo še novo oznako:

$$u_0 = \left( \frac{mM^*c}{l} \right)^2 \quad (\text{H.23})$$

Pokazalo se bo namreč, da je  $u_0$  povprečna vrednost spremenljivke  $u$  in je zato tudi majhna v primerih, ki nas zanimajo. Pod navedenimi pogoji in z oznakama 8.18 in 8.19 prepisemo enačbo 8.17 v obliko:

$$-2u_1 + 2u(1 - 4u_1) + 8(1 - 2u_1)u^2 = \frac{1}{u_0}(u'^2 + u^2) \quad (\text{H.24})$$

V gornji enačbi nastopajo količine, ki so majhne kot  $u$  (ali  $u_1$  ali  $u_0$ ) in količine, ki so majhne kot  $u^2$ . Ker so po privzetku (ki ga bo utemeljil rezultat) količine velikostnega reda zelo majhne ( $u \approx 10^{-8}$  za Zemljino orbito okrog Sonca), smemo vsaj v prvem približku zanemariti količine reda  $u^2$  in v tem približku ima enačba 8.17a obliko:

$$-2u_1 + 2u = \frac{1}{u_0}(u'^2 + u^2) \quad (\text{H.25})$$

To enačbo množimo z  $u_0$ , prenesemo  $2u_0u$  na desno in dopolnimo člena z  $u$  do popolnega kvadrata. Tako pridemo do enačbe orbite v obliki, ki je znana iz klasične Newtonove mehanike za problem dveh teles:

$$u_0^2\left(1 - 2\frac{u_1}{u_0}\right) = u'^2 + (u - u_0)^2 \quad (\text{H.26})$$

Njena rešitev pa je:

$$u = u_0 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2\frac{u_1}{u_0} \cos(\varphi - \varphi_0)} \right] \quad (\text{H.27})$$

**Naloga H.1:** Preveri korake, ki vodijo do 8.17, 8.17a in 8.20 in se prepričaj, da je 8.21 res rešitev 8.20 oz 8.20a, pri čemer je  $\varphi_0$  integracijska konstanta.

Končno zapišemo enačbo orbite  $r(\varphi)$  tako, da v 8.20 namesto  $u$  vstavimo  $r$  iz 8.16 in označimo:

$$r_0 = \frac{M^*}{u_0} = \frac{l^2}{m^2 M^* c^2} \quad (\text{H.28})$$

in

$$\epsilon = \sqrt{1 - 2\frac{u_1}{u_0}} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{l}{mM^*c}\right)^2 u_1} \quad (\text{H.29})$$

Tako dobimo:

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (\text{H.30})$$

Izrazimo orbito še v kartezičnih koordinatah! Brez škode izberemo  $\varphi_0 = 0$  in pomnožimo enačbo 8.24 z  $1 - \epsilon \cos(\varphi)$ . Upoštevamo še 8.6 in dobimo:

$$r - \epsilon x = r_0 \quad (\text{H.31})$$

Člen  $\epsilon x$  prestavimo na desno in kvadriramo ter upoštevamo, da je  $r^2 = x^2 + y^2$ . Dobljeno uredimo v normalno formo in ostane:

$$\frac{\left(x - \frac{r_0\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{r_0}{1-\epsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{r_0^2}{1-\epsilon^2}} = 1 \quad (\text{H.32})$$

Če je  $|\epsilon| < 1$  ( $u_1 > 0$ ), sta oba imenovalca pozitivna in 8.25 je enačba elipse z osema:

$$a = \frac{r_0}{1-\epsilon^2} \quad \text{in} \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (\text{H.33})$$

in ekscentričnostjo:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{r_0\epsilon}{1-\epsilon^2} \quad . \quad (\text{H.34})$$

Zamik središča elipse 8.25 iz koordinatnega izhodišča je ravno enak goriščni razdalji. Tako smo pokazali veljavnost prvega Keplerjevega zakona, ki pravi, da so orbite planetov elipse, katerih eno gorišče je v Soncu.

Drugi Keplerjev zakon je povezan z ohranitvijo vrtilne količine. Če vstavimo 8.2 v 8.4 in upoštevamo, da je za primere, ki nas ta trenutek zanimajo  $u \ll 1$ , lahko zapišemo vrtilno količino v obliki:

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (\text{H.35})$$

Spomnimo se, da je  $\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}$  ploščina trikotnika, ki ima za stranici vektorja  $\vec{r}$  in  $d\vec{r}$ . Tako je:

$$\vec{l}d\tau = 2m\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} = 2m\hat{n}dA \quad (\text{H.36})$$

Pri tem je  $dA$  ploščina, ki jo opiše vektor  $\vec{r}$  v času  $d\tau$ ,  $\hat{n}$  pa je enotski vektor, ki kaže v smer vrtilne količine. Konstantnost vrtilne količine torej zagotavlja konstantnost hitrosti naraščanja površine  $A$ , kar je Kepler izrazil s svojim drugim zakonom.

Pokažimo še veljavnost tretjega Keplerjevega zakona v limiti  $u \ll 1$ ! Enačbo 8.28 integriramo po obhodu planeta okrog Sonca. Na levi strani dobimo vrtilno količino (ki je konstantna) pomnoženo z obhodnim časom  $T$ , na desni pa je ploščina orbite ( $\pi ab$  - glej 8.25 in 8.26) pomnožena z  $2m$ . Kvadrat te izjave zapišemo takole:

$$\left(\frac{l}{m}\right)^2 T^2 = 4(\pi ab)^2 \quad (\text{H.37})$$

Razmerje  $\left(\frac{l}{m}\right)^2$  nadomestimo z  $r_0$  in  $M^*$  po 8.22,  $a$  in  $b$  na desni strani pa začasno nadomestimo z  $r_0$  in  $\epsilon$  po 8.26. Tako pridemo do izrazov:

$$r_0 M^* c^2 T^2 = 4\pi^2 \frac{r_0^4}{(1-\epsilon^2)^3} \Rightarrow \frac{M^* c^2}{4\pi^2} = \left(\frac{r_0}{1-\epsilon^2}\right)^3 \frac{1}{T^2} = \frac{a^3}{T^2} \quad (\text{H.38})$$

Tako smo pokazali tudi veljavnost tretjega Keplerjevega zakona v približku  $u \ll 1$ .

Edina (komaj) merljiva napoved Einsteinove teorije gravitacije, ki se razlikuje od newtonovske napovedi je prehitevanje planetnih perihelijev. Opis tega pojava je skrit v členih velikostnega reda  $u^2$  v enačbi 8.17, ki smo jih zgoraj zanemarili. Če upoštevamo še te člene zapišemo 8.17a v obliki:

$$u'^2 + (1 - 8u_0) \left[ u - u_0 \frac{1 - 4u_1}{1 - 8u_0} \right]^2 = u_0^2 \left[ \frac{(1 - 4u_1)^2}{1 - 8u_0} - 2 \frac{u_1}{u_0} \right] \quad (\text{H.39})$$

V tem trenutku je potrebna pazljivost - rezultat, ki bi ga dobili na osnovi gornje enačbe ni v skladu z eksaktno rešitvijo v okviru splošne relativnostne teorije! Kje tiči problem smo pravzaprav že omenili. Enačbe 6.11 in 6.16 sicer res predstavljajo rešitev enačb gravitacijskega polja točkaste mase, vendar točkasta masa ne more predstavljati edine mase-energije v prostoru. Masa namreč ustvari okrog sebe gravitacijsko polje, ki nosi, podobno kot vsako drugo polje, s seboj energijo. V napetostni tenzor, ki stoji na desni strani enačb gravitacijskega polja 6.18 bi morali zato vključiti tudi napetostni tenzor samega gravitacijskega polja. To pomeni, da stoje v izvoru polja ( $T_{\mu\nu}$ ) na desni strani enačb 6.18 same komponente polja, ki ga računamo. V kasnejšem poglavju bomo pokazali, da je energijska gostota gravitacijskega polja sorazmerna kvadratu (odvodov) potencialov, podobno kot je gostota elektromagnetnega polja ( $W_{EM} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$ ) sorazmerna kvadratu vektorskega potenciala. Na desni strani enačb 8.16 morajo torej poleg napetostnega tenzorja same mase stati še kvadrati (drugih odvodov) potencialov  $h_{\mu\nu}$ . Zaradi tega so enačbe gravitacijskega polja nelinearne. Približek, da smo upoštevali le prispevek mase-energije centralne mase je upravičen samo takrat, kadar je masa-energija centralne mase ( $Mc^2$ ) veliko večja od energije gravitacijskega polja v vsem prostoru. To pa bo skoraj gotovo res takrat, kadar je masa v prostoru dovolj razredčena, da je vrednost gravitacijskih potencialov v vseh točkah prostora zelo majhna. Ker je ta približek za Sonce zelo dober ( $h_{00}|_{pov.Son.} \approx ???.5 \times 10^{-5}$ ) in so planeti poleg tega razmeroma daleč od Sonca, so aproksimacije, ki vodijo do keplerskih orbit upravičene. Pričakovati pa moramo, da stoje v naslednjem boljšem približek za gravitacijsko polje še dodatni členi ki so sorazmerni kvadratu potencialov. Z drugimi besedami, obratna sorazmernost gravitacijskih potencialov z oddaljenostjo od mase je točna samo do tega reda; natančnejša teorija pa prav verjetno vsebuje še člene, ki padajo kot  $1/r^2$ ,  $1/r^3$  itd.



Izpeljevanje natančnih rešitev enačb polja bomo prihranili za kasnejša poglavja, tukaj navajamo le rezultat. Eksaktne rešitve pravijo, da je treba nadomestiti izraza kot sledi:

$$1 - 2u = 1 - \frac{2M^*}{r} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{1 - \frac{M^*}{2r}}{1 + \frac{M^*}{2r}} \right)^2 \approx 1 - 2u + 2u^2 \quad (\text{H.40})$$

in

$$1 + 2u = 1 + \frac{2M^*}{r} \quad \Rightarrow \quad \left( 1 + \frac{M^*}{2r} \right)^4 \approx 1 + 2u + \frac{3}{2}u^2 \quad (\text{H.41})$$

<sup>5</sup> Namesto enačbe 8.17 je treba v skladu z eksaktno rešitvijo enačb gravitacijskega polja pisati:

$$\left( 1 + \frac{u}{2} \right)^4 = -\gamma^2 \frac{\left( 1 + \frac{u}{2} \right)^6}{\left( 1 - \frac{u}{2} \right)^2} + \frac{1}{u_0} (u'^2 + u^2) \quad (\text{H.42})$$

Tako kot prej razvijemo člene v enačbi do velikostnega reda  $u^2$  ( $u_1^2$ ,  $u_0^2$ ). Nekaj stopenj v tem razvoju sledi spodaj:

$$-\left( 1 + 2u + \frac{3}{2}u^2 + \dots \right) + \gamma^2 \left( 1 + 3u + \frac{15}{4}u^2 + \dots \right) \left( 1 + u + \frac{3}{4}u^2 + \dots \right) = \frac{1}{u_0} (u'^2 + u^2) \quad (\text{H.43})$$

in naprej

$$\gamma^2 - 1 + 2u(2\gamma^2 - 1) + \left( \frac{15}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2} \right) u^2 + \dots = \frac{1}{u_0} (u'^2 + u^2) \quad (\text{H.44})$$

Upoštevamo še 8.18 pa lahko zapišemo naprej:

$$-2u_1 + 2u(1 - 4u_1) + 6u^2 \approx \frac{1}{u_0} (u'^2 + u^2) \quad (\text{H.45})$$

Člene z  $u$  in  $u^2$  damo na desno in dopolnimo do popolnega kvadrata, tako kot prej, pa dobimo:

$$u_0^2 \left[ \frac{(1 - 4u_1)^2}{1 - 6u_0} - 2\frac{u_1}{u_0} \right] = u'^2 + (1 - 6u_0) \left( u - u_0 \frac{1 - 4u_1}{1 - 6u_0} \right)^2 \quad (\text{H.46})$$

Ta enačba, ki se od (8.17narobe) razlikuje v glavnem po tem, da pri členu  $(u - \dots)^2$  stoji  $1 - 6u_0$  namesto  $1 - 8u_0$ , je podobna 8.20, z edino pomembno razliko, da pred

---

<sup>5</sup>Zaradi zgodovinske perspektive je treba povedati, da je eksaktna rešitev enačb gravitacijskega polja v okolici poljubno goste mase kot je predstavljajo izrazi 8.30 po obliki drugačna od originalne Schwarzschildove rešitve, ker je bila najprej zapisana v drugi kalibraciji.

členom  $\left[ u - u_0 \frac{1-4u_1}{1-6u_0} \right]^2$  stoji  $1 - 6u_0$  in ne enica. Kvadratni koren iz tega člena se zato pojavi kot faktor v argumentu kosinusa. Tako je rešitev (preveri!):

$$u = u_0 \frac{1-4u_1}{1-6u_0} \left[ 1 + \epsilon' \cos(\sqrt{1-6u_0}(\varphi - \varphi_0)) \right] \quad (\text{H.47})$$

Pri tem je  $\epsilon'$  praktično enak  $\epsilon$  iz 8.22, to je:

$$\epsilon' = \sqrt{1 - 2\frac{u_1}{u_0} + 6u_0 - 8u_1} \quad (\text{H.48})$$

Če primerjamo 8.30 z 8.20 ugotovimo, da se obnaša koordinata  $r(= \frac{M^*}{u})$  v obeh primerih skoraj enako, s to razliko, da se v 8.20  $r$  vrne na isto vrednost po natanko celem obratu kota  $\varphi$  ( $\Delta\varphi = 2\pi$ ), v 8.33 pa se to zgodi, ko je  $\sqrt{1-6u_0}\Delta\varphi \approx (1 - 3u_0)\Delta\varphi = 2\pi$ . To pomeni, da mora narediti kot  $\varphi$  polni obhod ( $2\pi$  radianov) in še  $2\pi 3u_0$  radianov, da se vektor  $r$  zopet povrne v perihelij. Orbita, ki usteza 8.33 je torej elipsa, katere perihelij se na vsak obhod premakne za  $\Delta\varphi_{prec} = 2\pi 3u_0$  radianov v smeri orbitalnega gibanja.

Izračunajmo hitrost precesije perihelija za Merkur. Njegovi orbitalni podatki so:

$$a_{Merk} = 57.91 \times 10^6 km \quad (\text{H.49})$$

$$\epsilon_{Merk} = 0.2056 \quad (\text{H.50})$$

Iz podatka, da je za Sonce

$$M_{\odot}^* = 1.477 km \quad (\text{H.51})$$

in iz gornjih podatkov, izračunamo  $u_0$  za Merkur:

$$u_{0Merk} = \frac{M^*}{r_0} = \frac{M^*}{a(1-\epsilon^2)} = 2.66 \times 10^{-8} \quad (\text{H.52})$$

Tako je:

$$\Delta\varphi_{prec} = 2\pi 3u_0 = 5.014 \times 10^{-7} \frac{\text{radianov}}{\text{obhod}} = 0.1035''/\text{obhod}, \quad (\text{H.53})$$

oziroma

$$\Delta\varphi_{prec} = 0.1035'' \frac{1}{\text{obhod}} 415 \frac{\text{obhodov}}{\text{stoletje}} = 43.0''/\text{stoletje} \quad (\text{H.54})$$

Merkurjev perihelij v resnici precedira veliko hitreje - za skoraj  $600''/\text{stoletje}$ . Vendar so imeli astronomi zaradi večstoletnega zanimanja za gibanje planetov dovolj

podatkov, da so mogli natančno primerjati računske napovedi za lege planetov v okviru Newtonove mehanike z meritvami. Napovedi so se ujemale z meritvami, edino Merkur je kazal 43 sekundno diskrepanco na stoletje. Pred Einsteinom je večina smatrala dodatno precesijo perihelija za nenapovedanih 43'' na stoletje kot dokaz, da obstaja znotraj Merkurjevega tira v Osončju še en planet. Tak planet so v resnici iskali pa ga niso našli. Namesto tega je Schwabe odkril 11 letni cikel Sončeve aktivnosti.

**Naloga H.2:** Naj planet kroži okrog svojega Sonca ( $\epsilon = 0$ ). Pokaži, da bo oddaljeni opazovalec izmeril krožilno periodo ( $P = (1 + \frac{3}{2}\frac{M^*}{a})T$ ), ki je nekoliko daljša od tiste, ki jo izmeri opazovalec na planetu ( $T$  - glej 8.28). Zakaj ta pojav ne spada med standardne teste splošne relativnosti?

## 9 Gibanje svetlobe v gravitacijskem polju sonca

V prejšnjem poglavju smo izpeljali enačbo orbite (8.17 oz. 8.31) za majhen delec ( $m$ ), ki se giblje v polju velike mase ( $M$ ). Analizo smo omejili na vezane orbite, ker je bil študij planetnih gibanj stoletja eden vrhuncev astronomije in je bilo mogoče opazovati tako neznatne pojave kot je precesija perihelija samo pri gibanju, ki je periodično in tudi zato zelo dobro znano in izmerjeno. Enačba 8.17 oziroma njena bolj točna različica 8.31 pa dopušča tudi hiperbolične orbite, ki se centralni masi približajo iz neskončnosti in se vanjo po dovolj dolgem času vrnejo. Take rešitve dobimo, če izberemo za  $u_1$  v 8.25 negativno vrednost. Masivna telesa, ki bi letela po takšnih orbitah so v Osončju zelo redka. Poleg tega so opazovanjem dostopna le med kratkim bivanjem v neposredni bližini Sonca. Zato njihovih orbitalnih parametrov ne moremo določiti dovolj natančno, da bi bila zanimiva za preverjanje zakonov splošne relativnosti. Izjema je svetloba, če smemo smatrati fotone za delce, ki se gibljejo s to največjo možno hitrostjo. V tem poglavju bomo zato pokazali, kako se gibljejo fotoni v gravitacijskem polju mase  $M$ .

**Naloga I.1:** Pokaži, da vektor četverec gibalne količine zelo hitrega delca preide v vektor gibalne količine fotona v limiti, ko gre  $\gamma \rightarrow \infty$  in  $m \rightarrow 0$ . Proti kateri vrednosti gre produkt  $m\gamma$ ?

V skladu z nalogo 9.1 bomo smatrali foton za zelo hiter delec z  $\gamma \gg 1$ . Enačba orbite 8.17 preide v tem primeru v:

$$u_0\gamma^2(1 + 4u) = u'^2 + u^2 \quad , \quad (\text{I.1})$$

oziroma v:

$$(2u_0\gamma^2)^2 + u_0\gamma^2 = (u - 2u_0\gamma^2)^2 + u'^2 \quad (\text{I.2})$$

**Naloga I.2:** Pokaži, da se enačba 9.1 ujema z 8.31 do členov reda  $u^2$  ( $u_0^2$ ,  $u_0u$ ).

Rešitev 9.1a je seveda:

$$u = 2u_0\gamma^2 \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4u_0\gamma^2} \cos(\varphi)} \right] \quad (\text{I.3})$$

Upoštevamo 8.16 in označimo:

$$2u_0\gamma^2 = \frac{M^*}{r_0} \quad (\text{I.4})$$

pa lahko orbito namesto v obliki 9.2 zapišemo z  $r$  in  $\varphi$ :

$$r = \frac{r_0}{1 + \sqrt{1 + \frac{r_0}{2M^*} \cos \varphi}} \quad (\text{I.5})$$

Izraz 9.4 je ekvivalenten 8.24, pri čemer je:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{r_0}{2M^*}} \gg 1 \quad (\text{I.6})$$

Po 8.25 sledi, da je 9.4 enačba hiperbole z osema:

$$a = \frac{r_0}{\epsilon^2 - 1} = 2M^* \quad \text{in} \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \sqrt{2M^*r_0} \quad (\text{I.7})$$

Kot odklona ( $\theta$ ) delca (fotona), ki se giblje po trajektoriji 9.4, je kot med asimptotama hiperbole z osema 9.6, torej:

$$\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2M^*}{r_0}} \quad (\text{I.8})$$

Smiselno je izraziti kot  $\theta$  z najmanjšo oddaljenostjo delca (fotona) od središča sonca ( $r_{min}$ ). Po 9.4 vidimo, da je  $r = r_{min}$ , ko je  $\cos \varphi = 1$  in je torej:

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} \approx \sqrt{2M^*r_0} \quad (\text{I.9})$$

Opazimo še, da je kot  $\theta$  v šibkem gravitacijskem polju, v katerem veljajo naše enačbe zelo majhen, zato je  $\text{tg}\theta \approx \theta$ . Iz enačb 9.7 in 9.8 tako dobimo:

$$\theta = \frac{4M^*}{r_{min}} \quad (\text{I.10})$$

Napoved, da se foton odkloni v gravitacijskem polju Sonca za kot  $\theta$ , če se približa Soncu na razdaljo  $r_{min}$  je bila v nasprotju s pričakovanji takratne fizike in potrditev te napovedi, ki je sledila opazovanju zvezd v okolici Sonca med sončnim mrkom l. 1919 je bila prvovrstni znanstveni dogodek, ki je utrdil prepričanje, da splošna relativnost bolje opiše naravo kot Newtonova fizika in Maxwelllova elektrodinamika. Sam kot odklona je za Sonce sicer zelo majhen. Najbolj se v gravitacijskem polju Sonca odklonijo žarki od zvezd, ki praktično oplazijo Sončevo površino, torej tisti žarki, za katere je  $r_{min} = R_{\odot}$ , pri čemer je polmer Sonca  $R_{\odot} = 6.9598 \times 10^5 km$ . Ti žarki se zato odklonijo za kot:

$$\theta_{\odot} = \frac{4 \times 1.477 km}{6.9598 \times 10^5 km} = 8.49 \times 10^{-6} rad = 1.75'' \quad (I.11)$$

V zvezi z razširjanjem svetlobe v gravitacijskem polju velike mase sta znana še dva pojava, ki jih splošna relativnost napoveduje drugače kot nerelativistična fizika. To sta gravitacijski rdeči premik in zakasnitev svetlobe, če je na poti med dvema točkama v prostoru svetloba oplazila veliko maso.

Gravitacijski rdeči premik ima zelo preprosto razlago. Zato, ker čas ( $x^0$ ) ne nastopa ekslicitno v Lagranževi funkciji, so rešitve enačbe orbite vedno funkcije relativnega časa  $t - t_0$ , pri čemer je  $t_0$  trenutek, ko je šel foton skozi izbrano začetno lego  $\varphi_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ . To pomeni: če je šel prvi foton skozi točko  $\varphi_0$  ob času  $t_0$  in drugi foton skozi isto točko ob času  $t_0 + \Delta t$  in gre prvi foton skozi točko  $\varphi_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  ob času  $t_1$ , gre drugi foton skozi točko  $\varphi_1$  ob času  $t_1 + \Delta t$ . Zakasnitev  $\Delta t$  je neodvisna od izbire trenutka  $t_1$ . Vzemimo, da je v časovnem intervalu  $\Delta t$  elektromagnetno polje v točki  $\varphi_1$  zanihalo  $N - krat$ . V tem istem časovnem intervalu bo  $\Delta t$  kasneje v točki  $\varphi_1$  elektromagnetno polje ravno tako  $N - krat$  zanihalo. Vendar lastni časovni interval, ki ga meri mirujoči opazovalec v točki  $\varphi_0$  ni enak  $\Delta t$ . Če namreč verjamemo, da je gravitacijska teorija metrična teorija, mora biti merjeni časovni interval po 4.19 enak:

$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \sqrt{-(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu}} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \sqrt{1 - h_{00}(r)}dt = \sqrt{1 - h_{00}(r)}\Delta t \quad (I.12)$$

Upoštevamo, da je na razdalji  $r$  od mase  $M$   $h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{2M^*}{r}$  (Glej 6.16 in 6.17) in ugotovimo, da izmeri opazovalec v točki  $\varphi_0$  frekvenco

$$\nu_0 = \frac{N}{\Delta t \sqrt{1 - \frac{2M^*}{r_0}}} \quad (I.13)$$

Opazovalec v točki  $\wp_1$  pa izmeri za isto elektromagnetno valovanje frekvenco:

$$\nu_1 = \frac{N}{\Delta t \sqrt{1 - \frac{2M^*}{r_1}}} \quad (\text{I.14})$$

Obe frekvenci se razlikujeta za:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_0 \approx \nu_\infty \left( \frac{M^*}{r_1} - \frac{M^*}{r_0} \right) = -\nu_\infty \frac{M^*}{r_0 r_1} (r_1 - r_0) \quad (\text{I.15})$$

Pri tem je  $\nu_\infty = \frac{N}{\Delta t}$  frekvenca opazovane svetlobe, kot jo izmeri opazovalec zelo daleč od mase  $M$ . Iz 9.13 je razvidno, da se svetlobi frekvenca zmanjšuje, ko se "vzpenja" iz gravitacijskega polja mase proti večjim oddaljenostim. Ta pojav je komaj mogoče opaziti na nekaterih črtah svetlobe s Sonca. Če namreč opazujemo frekvenco svetlobe, ki jo odda (ali absorbira) npr. kalcijev atom dobimo vedno isto vrednost v tistem sistemu, kjer atom seva. Če bi mogli opazovati absorpcijo svetlobe na Sončevi površini na kalcijevih atomih, bi opazili, da pride do nje pri natanko istih frekvencah kot jih izmerimo za enak poskus na površini Zemlje ali na površini kakšnega drugega telesa. Ko pa svetloba prepotuje od Sonca do Zemlje, se mora vzpeti iz gravitacijskega polja Sonca (in pade v veliko-veliko šibkejše zemeljsko gravitacijsko polje), tako da na Zemlji izmerimo nekoliko nižjo frekvenco, oziroma nekoliko daljšo valovno dolžino (zato rdeči premik). Po 9.13 je relativno zmanjšanje frekvence:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_\infty} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{M_\odot^*}{R_\odot r_1} (r_1 - R_\odot) \approx \frac{M_\odot^*}{R_\odot} \quad (\text{I.16})$$

Iz podatkov za Sonce (glej 8.36) izračunamo, da je relativno podaljšanje valovnih dolžin svetlobe, ki izvira s površine Sonca:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{1.5km}{700.000km} \approx 2 \times 10^{-6} \quad (\text{I.17})$$

Z optičnimi meritvami je mogoče doseči še večjo natančnost kot  $10^{-6}$ , vendar utrpi svetloba, ki se absorbira ali izseva na "površini" Sonca, še druge premike, kot npr. dopplerski premik zaradi konvekcijskega gibanja zunanjih Sončevih plasti, pa Starkov premik zaradi fluktuirajočega električnega polja ionov v okoliški plazmi. Zaradi teh pojavov je gravitacijski rdeči premik težko izluščiti iz natančnih podatkov o položaju absorpcijskih črt v Sončevem spektru. Za svetlobo, ki prihaja z belih pritlikavk (imajo podobno maso kot Sonce in približno 100 krat manjši polmer) je rdeči premik še približno 100 krat večji, vendar so njihovi spektri zaradi visokega tlaka (in gostote)

na površini precej razmazani, tako da tudi te zvezde niso preveč natančno potrdile gravitacijskega rdečega premika. Najbolj natančno sta pojav izmerila Pound in Rebka kar v gravitacijskem polju Zemlje, vendar s pomočjo izredno občutljive Mössbauerjeve spektroskopije. Ta napoved teorije relativnosti je torej dobro preverjena in jo imamo za pomembno podporo ideji, da mora biti teorija gravitacije metrična teorija.

Zadnji od pojavov povezanih z razširjanjem svetlobe v polju velike mase je zakasnitev svetlobe. Poskus, ki pokaže tako zakasnitev je naslednji. Opazovalca v dveh oddaljenih relativno mirujočih točkah v prostoru ( $\varphi$  in  $\bar{\varphi}$ ) komunicirata s svetlobo. Če med njima ni nikakršne mase, ugotovita, da je za prenos signala med njima potreben čas  $\Delta t = \frac{d(\varphi, \bar{\varphi})}{c}$ , pri čemer je  $d(\varphi, \bar{\varphi})$  razdalja med točkama  $\varphi$  in  $\bar{\varphi}$ . Če pa se v bližini poti med opazovalcema znajde velika masa, se čas, ki je potreben za komunikacijo podaljša.

Do časa za prelet fotona med dvema točkama v prostoru pridemo s pomočjo znane enačbe orbite iz s pomočjo dejstva, da se vzdolž orbite ohranja vrtilna količina. Iz zakona o vrtilni količini v obliki 8.11c sledi:

$$\frac{l}{m}d\tau = \left(1 + \frac{2M^*}{r}\right)r^2d\varphi \quad (\text{I.18})$$

Zvezo med parametrom  $\tau$  in koordinatnim časom  $t$  dobimo iz zakona o ohranitvi energije 8.11b v obliki:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \left(1 - \frac{2M^*}{r}\right) \quad (\text{I.19})$$

Ko združimo 9.16 in 9.17 in upoštevamo, da je  $u = \frac{M^*}{r} \ll 1$ , lahko zapišemo:

$$dt = \frac{m\gamma}{l}(1 + 4u)r^2d\varphi \quad (\text{I.20})$$

Limita  $\frac{m}{l}$  je dana z 8.19, zveza med  $r$  oz.  $u$  in  $\varphi$  pa je enačba orbite 9.2. S tem zapišemo 9.18 v obliki:

$$dt = \frac{2M^*}{c}(\epsilon^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \frac{2}{\epsilon^2 - 1} + \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \cos \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \quad , \quad (\text{I.21})$$

pri čemer sem v skladu z 9.2 zapisal:

$$4u_0\gamma^2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \quad (\text{I.22})$$

**Naloga I.3:** Z upoštevanjem 8.19 in 9.2 transformiraj 9.18 v obliko 9.19.

Časovni interval  $\Delta t$  dobimo tako, da integriramo 9.19 na obeh straneh. Za ta namen si oglejmo integral:

$$\begin{aligned}
 I(\varphi; \epsilon) &= \int \frac{\epsilon^2 + 1 + 2\epsilon \cos \varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \int \frac{(\epsilon + 1)^2 - 4\epsilon \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\left[\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \epsilon \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \epsilon \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right]^2} d\varphi = \\
 &= \int \frac{(\epsilon + 1)^2 (tg^2 \frac{\varphi}{2} + 1) - 4\epsilon tg^2 \frac{\varphi}{2}}{\left[(\epsilon + 1) - (\epsilon - 1)tg^2 \frac{\varphi}{2}\right]^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \\
 &= 2 \int \frac{tg^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{(\epsilon+1)^2}{\epsilon-1}}{\left[\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1} - tg^2 \frac{\varphi}{2}\right]^2} dtg \frac{\varphi}{2} \quad (I.23)
 \end{aligned}$$

S substitucijo  $z = tg \frac{\varphi}{2}$  pridemo do integrala oblike:

$$\int \frac{a^4 + z^2}{(a^2 - z^2)^2} dz = \frac{1 - a^2}{4a} \ln \frac{a - z}{a + z} + \frac{1 + a^2}{2} \frac{z}{a^2 - z^2} \quad (I.24)$$

Tako dobimo za časovni interval:

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{4M^*}{c} \sqrt{\epsilon^2 - 1} \left[ \epsilon \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{\epsilon + 1 - (\epsilon - 1)tg^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}} - tg \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}} + tg \frac{\varphi}{2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (I.25)$$

Notacija  $\left[ \dots \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$  pomeni, da moramo izračunati vrednost oglatega oklepaja za  $\varphi = \varphi_2$  in od njega odšteti vrednost oglatega oklepaja za  $\varphi = \varphi_1$ . Prvi člen preoblikujemo po naslednjih korakih: števec in imenoalec množimo s  $\cos^2 \frac{\varphi}{2}$  in upoštevamo, da je  $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$  in  $\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ . Upoštevamo še 9.5 v obliki  $r_0 = 2M^*(\epsilon^2 - 1)$ . V drugem členu pa nadomestimo  $\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1} = tg \frac{\varphi_0}{2}$ , pri čemer je  $\varphi_0$  kot, ki ga oklepa asimptota (hiperbolične) orbite z osjo koordinatnega sistema (ki je orientirana od gorišča hiperbole proti temenu). S temi ugotovitvami lahko zapišemo 9.23 v obliki:

$$\Delta t = \left[ \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}}} \frac{r_0 \sin \varphi}{1 + \epsilon \cos \varphi} - \frac{2M^*}{c} \ln \frac{tg \frac{\varphi_0}{2} - tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\varphi_0}{2} + tg \frac{\varphi}{2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (I.26)$$

Faktor  $\frac{1}{\sqrt{\dots}}$  pri prvem členu je enak 1 do drugega reda v majhni količini, preostali del prvega člena pa prepoznamo kot  $(r_2 \sin |\varphi_2| + r_1 \sin |\varphi_1|)/c$ , to je (zopet z natančnostjo do drugega reda) razdalja med začetno in končno točko deljena s hitrostjo svetlobe. Ta člen da klasični izraz za čas preleta med točkama "1" in "2". Drugi logaritemski



člen pa je relativistični popravek. Oglejmo si ga! Kot  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$  (glej 9.9) je za neznatnih  $\theta/2$  večji od  $\frac{\pi}{2}$ . Zato je  $tg\frac{\varphi_0}{2} \approx 1 + \frac{\theta}{2}$ . Kadar je foton že zelo daleč od Sonca ( $r_2 \gg r_{min}$ ) je kot  $\varphi_2$  je le malo manjši od  $\varphi_0$ , zato je  $tg\frac{\varphi_2}{2} \approx 1 + \frac{\theta'}{2}$ . Podobno velja za čas, ko je foton oddan na razdalji  $r_1$  ( $\gg r_{min}$ ); tedaj je  $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \theta''$ . Tako je  $\theta - \theta'$  kot med izhodno asimptoto orbite in radij vektorjem  $r_2$ ,  $\theta - \theta''$  pa kot med vhodno asimptoto orbite in radij vektorjem  $r_1$ . Zato je

$$\sin(\theta - \theta') = \frac{p}{r_2} \approx \frac{r_{min}}{r_2} \quad (I.27)$$

in

$$\sin(\theta - \theta'') = p/r_1 \approx \frac{r_{min}}{r_1} \quad (I.28)$$

Pri tem je  $p$  oddaljenost asimptot od gorišča hiperbolične orbite; za zelo malo ukrivljene orbite ( $\epsilon \gg 1$ ) je  $p \approx r_{min}$ .<sup>6</sup> Relativistični popravek za čas preleta fotona ( $\delta t$ ) - drugi člen v 9.24 - je tako:

$$\delta t = -\frac{2M^*}{c} \ln \frac{1 + \frac{\theta}{2} - 1 - \frac{\theta'}{2}}{1 + \frac{\theta}{2} + 1 + \frac{\theta'}{2}} + \frac{2M^*}{c} \ln \frac{1 + \frac{\theta}{2} + 1 + \frac{\theta''}{2}}{1 + \frac{\theta}{2} - 1 - \frac{\theta''}{2}} \quad (I.29)$$

Ko upoštevamo 9.25 in dejstvo, da so koti  $\theta$ ,  $\theta'$  in  $\theta''$  zelo majhni, pridemo do končnega izraza:

$$\delta t = \frac{4M^*}{c} \ln \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_{min}} \quad (I.30)$$

Zakasnitev raste torej logaritemsko, ko se žarek giblje vse bliže in bliže veliki masi  $M$ . Merilo za skalo je morda presenetljivo geometrijsko povprečje razdalj oddajnika in sprejemnika od velike mase. Za Sonce je  $\frac{4M^*}{c} \approx 6km/300.000km/s = 20\mu s$ , tipična razdalja je astronomska enota - razdalja med Zemljo in Soncem ( $1a.e. = 150 \times 10^6 km$ ), najmanjša oddaljenost med žarkom in središčem Sonca pa je seveda polmer Sonca. Tako je

$$\delta t_{Zem-planet} \approx 20\mu s \times \ln \frac{300 \times 10^6 km}{700.000 km} \approx 120\mu s \quad (I.31)$$

Največja zakasnitev ni kaj posebno velika - ustreza času v katerem preleti svetloba razdaljo  $36km$ . To zakasnitev so merili na radijskih signalih, ki so jih odbijali od Venere in Merkurja, ko sta zahajala za Soncem. Rezultat se ujema z napovedjo splošne relativnosti, čeprav je treba povedati, da meritev nikakor ni enostavna,

---

<sup>6</sup>Pokaži, da je  $p = \frac{r_0}{\epsilon}$ . Ko upoštevaš 9.8, je jasno, da je za malo ukrivljene orbite  $p \approx r_{min}$

saj je zakasnitev komaj večja od časa preleta svetlobe od vrha do dna Venerinih in Merkurjevih gora. Razen tega se zaradi logaritemske odvisnosti zakasnitev zelo počasi spreminja s časom. Rezultat je zato potrjen "le" z 10 odstotno natančnostjo, njegova potrditev pa zaokroža klasične napovedi splošne relativnosti v Sončnem sistemu.

### Opomba o gravitacijskih lečah

Videli smo, da se v teoriji gravitacije svetloba lomi v polju mase. To pomeni, da gravitacijsko polje lahko služi kot optično sredstvo, ki preslika oddaljene objekte, torej kot leča. Vendar se gravitacijske leče razlikujejo od navadnih leč. Pomembna razlika je ta, da gravitacijske leče običajnih astronomskih objektov tipično nimajo velike lomne moči. Videli smo npr., da se žarek, ki oplazi Sonce zlomi komaj za  $1,75''$ . Ta kot je podoben za druge zvezde in seveda pada, kot smo pokazali, z oddaljenostjo žarka od težišča zvezde. Torej je zvezda lahko le zelo šibka leča s premerom, ki ni dosti večji od nje same. Vprašati se moramo ali je pri opazovanju zvezd preslikava z gravitacijsko lečo ne samo možna, ampak tudi verjetna. To pomeni, ali so zvezde na nebu dovolj gosto posejane, da obstaja zadostna verjetnost za to, da sta za nas dve zvezdi tako poravnani, da bližnja od para gravitacijsko preslika bolj oddaljeno. V naslednjem odstavku bomo ocenili to verjetnost.

Število preslikanih objektov na danem delu neba (ki oklepa npr. prostorski kot  $\Delta\Omega$ ) proti številu vseh objektov na tem delu neba, je prostorski kot pod katerim vidimo vse leče v  $(\Omega_l)$  proti prostorskemu kotu opazovanja ( $\Delta\Omega$ ). Ocenimo to razmerje za zvezde v naši Galaksiji. Gostota zvezd v naši okolici ( $n_*$ ) je okrog  $1pc^{-3}$  (parsek je približno 3 svetlobna leta), vidimo pa jih do razdalje nekako dveh kiloparsekov ( $D \approx 2 \times 10^3 pc$ ). Razdalja  $D$  je nekako srednja ocena, ki sledi iz zaključka, da se Galaksija v smeri pravokotno na njeno ravnino že malo prej konča, v smeri proti središču pa naš pogled v dosti večje oddaljenosti preprečuje galaktični plin. V prostorskem kotu  $\Delta\Omega$  bomo torej videli tipično  $\Delta N$  zvezd, pri čemer je:

$$\Delta N \approx n_* \Delta V \approx \frac{1}{3} n_* D^3 \Delta\Omega \approx 3 \times 10^9 \Delta\Omega \quad (I.32)$$

Prostorski kot pod katerim vidimo te zvezde pa ocenimo takole: Vzemimo, da so vse zvezde podobne Soncu, torej imajo polmer  $R_* = 700.000 km = 2.3 \times 10^{-8} pc$ . Zvezdo na razdalji  $r$  vidimo pod prostorskim kotom  $\delta\Omega = \pi R_*^2 / r^2$ . Število zvezd, ki jih vidimo v plasti oddaljeni  $r$  in z debelino  $dr$  (v prostorskem kotu  $\Delta\Omega$ ) je  $dN = n_* r^2 \Delta\Omega dr$ . Prostorski kot pod katerim vidimo vse te zvezde skupaj je  $dN \times \delta\Omega$ , prostorski kot pod katerim vidimo vse zvezde na izbranem delu neba ( $\Delta\Omega$ ) pa je

očitno:

$$\Omega_l = \int_0^D \left( \frac{\pi R_*^2}{r^2} \right) n_* r^2 \Delta\Omega dr = \pi R_*^2 D n_* \Delta\Omega \approx 3.2 \times 10^{-12} \times \Delta\Omega \quad (\text{I.33})$$

Verjetnost ( $\Omega_l/\Delta\Omega$ ), da je zvezda slučajno za gravitacijsko lečo druge zvezde je torej izjemno majhna; tudi če jo pomnožimo s številom vseh vidnih zvezd je produkt manjši od 1. Zato ne moremo pričakovati, da bi preslikava z gravitacijskimi lečami igrala zaznavno vlogo pri opazovanju zvezd.

Položaj se spremeni, če namesto o zvezdah govorimo o galaksijah. Za povprečno galaksijo vzemimo za grobo oceno naslednje podatke: naj bo velikost tipične galaksije ( $R_g$ ) približno tolikšna kot je velikost jedra naše Galaksije, njena masa ( $M_g$ ) pa enaka masi naše Galaksije, to je  $R_g \approx 3kpc$  in  $M_g \approx 10^{11} M_\odot$ . Poučeni bralec bo morda ugovarjal, saj naša Galaksija ne spada ravno med pritlikavke, pa tudi njeno celotno maso smo spravili v jedro, kar ni točno res (čeprav je velik del njene mase v resnici v jedru). Rezultat bomo zato vzeli s primerno rezervo kot zelo grobo oceno. Taka "tipična" galaksija odkloni svetlobne žarke, ki jo oplazijo, prav tako kot Sonce za kot  $\theta \approx 4GM_g^*/R_g \approx 1.5''$ , torej bomo računali prav tako kot prej, da je velikost gravitacijske leče, ki jo tvori galaksija, približno enaka njeni velikosti  $R_g$ . Prostorski kot  $\Omega_{lg}$  pod katerim vidimo gravitacijske leče vseh galaksij izračunamo natanko tako kot v 9.29, le namesto velikosti zvezde ( $R_*$ ) moramo pisati velikost galaksije ( $R_g$ ), namesto gostote zvezd pišemo gostoto galaksij ( $n_g \approx 1Mpc^{-1}$ ), namesto globine pogleda v Galaksiji ( $D$ ) pa pišemo globino pogleda v vesolje ( $cH^{-1} \approx 3Gpc$ ). Število vseh "vidnih" galaksij je tako

$$\Delta N_g \approx n_g \Delta V \approx \frac{1}{3} n_g (cH^{-1})^3 \Delta\Omega \approx 9 \times 10^9 \Delta\Omega \quad (\text{I.34})$$

Prostorski kot pod katerim vidimo gravitacijske leče teh galaksij pa je po 9.29\*:

$$\Omega_l = \int_0^{cH^{-1}} \left( \frac{\pi R_g^2}{r^2} \right) n_g r^2 \Delta\Omega dr = \pi R_g^2 cH^{-1} n_g \Delta\Omega \approx 0,08 \times \Delta\Omega \quad (\text{I.35})$$

Izračunali smo, da je verjetnost za to, da je na poljubnem delu neba gravitacijska leča neke galaksije 8 odstotna. Ta številka je ogromna! Verjetno je kar za nekaj velikostnih redov prevelika, pa tudi če je desetstisočkrat prevelika, bi moralo biti kakih  $10^5$  galaksij v vesolju za nas za gravitacijsko lečo druge galaksije. Velikosti te številke so se marsikateri astronomi zavedali že pred precej leti in so iskali slike, ki bi kazale na preslikavo z gravitacijsko lečo. Kot je pogosto res, se sreča ni nasmehnila sistematičnemu iskalcu tega pojava, pač pa sistematičnemu preiskovalcu

neba, angleškemu astronomu Davidu Walshu, ki je prvi našel dva kvazarja zelo blizu na nebu z enakima rdečima premikoma in enakima spektroma (1979). Meritve so kmalu potrdile, da sta oba kvazaraja s skupnim imenom dvojni kvazar 0957+561 <sup>7</sup> sliki enega objekta, ki ga preslika v dve sliki gravitacijska leča galaksije na poti med kvazarjem in nami.

Preslikava z gravitacijsko lečo je lahko razmeroma komplicirana - to je druga razlika med optičnimi in gravitacijskimi lečami. Gravitacijske leče imajo namreč to lastnost, da lahko pomnožijo sliko objekta, ki ga preslikujejo. "Točkasta" masa npr. preslika oddaljeno točkasto sveto v dve sliki, kot je prikazano na sl. 4. Centralni žarek vsake od obeh slik leži očitno v ravnini izvor, središče gravitacijske leče, opazovalec. Ker pa se žarek, ki gre bliže masi lahko bolj lomi od tistega, ki gre mimo nje na večji razdalji, obstajata, če je gravitacijska leča točkasta masa, vedno dve hiperboli v naši ravnini, ki objameta "točkasto" lečo. Če je gravitacijska leča razsežna, pa seveda lahko pride do senčenja enega ali pa celo obeh žarkov. Kaže, da je dvojni kvazar 0957+561 lep primer take gravitacijske preslikave, kjer oba žarka nemoteno obletita maso gravitacijske leče.

## 10 Orodja geometrije v $n$ -razsežnih prostorih

Do sedaj smo spoznali, da je teorija gravitacije relativistična teorija, ki je invariantna glede na lokalne Lorentzove transformacije in je torej teorija, ki za svoj opis zahteva štirirazsežni prostor-čas. Ugotovili smo tudi, da je moč razumeti gravitacijske potenciale kot komponente tenzorja, ki določa metrične relacije v prostoru. Večkrat rečemo, da je splošna teorija relativnosti teorija ukrivljenega prostora-časa. Od klasične newtonovske fizike so torej splošna relativnost razlikuje v dveh potezah. Prostor, v katerem se godi splošna relativnost je štiri-razsežen in ne tri-razsežen, kot v newtonovski fiziki, razen tega pa ima prostor svojo dinamiko, ki je določena v harmoniji z gibanjem snovi. Klasični vektorski račun, ki operira z vektorji v 3-razsežnem ravnem prostoru je zato že v okviru specialne relativnosti uporaben samo z določenimi reinterpretacijami. Tako je npr. težko razumeti z nazornimi sredstvi zakaj merimo polje, ki je v enem inercialnem sistemu čisto električno polje, v drugem inercialnem sistemu kot kombinacijo električnega in magnetnega polja. V okviru delitve na prostor in čas je težko razumeti napetostni tenzor, ki je bistvena karakteristika vsakega polja v prostoru. Splošno relativnost pa je še posebej težko

---

<sup>7</sup>številke v imenu povedo položaj kvazarja na nebu; njegova rektascenzija je  $9^h 57^{min}$ , deklinacija pa  $56,1^\circ$ .

razumeti, če dosledno vztrajamo pri ločitvi na krajevne in časovne komponente. Ena glavnih ovir pri formulaciji sodobnih kovariantnih teorij polja, od katerih je splošna relativnost pomemben predstavnik, je bila človeška dvatisočletna izkušnja z ravnim 3-razsežnim evklidskim prostorom. Pojme evklidske geometrije spoznamo že tako zgodaj v življenju, da se nam zdi nenaravno in nemogoče, da bi bila geometrija lahko tudi drugačna. Šele po nastanku splošne teorije relativnosti se je začel rojevati novi pogled na geometrijo in predvsem na diferencialno geometrijo, ki danes bistveno olajša ne samo razumevanje struktur splošne relativnosti, ampak tudi razumevanje struktur drugih teorij polja. V naslednjih poglavjih si bomo zato ogledali nekatere pojme diferencialne geometrije. Moja želja je bralca prepričati, da je mogoče na geometrijo gledati tudi drugače kot z Evklidovimi očmi in da je tak pogled dozzetnejši za posplošitve. Ker nisem matematik, ne nameravam posameznih korakov strogo dokazovati, ampak želim le pokazati, kako je mogoče uporabljati novo orodje na že znanih zgledih. Zato bom pogosto obravnaval znane pojme v 3-razsežnem evklidskem prostoru, vendar na način, ki omogoča preprosto posplošitev na več-razsežne prostore. Pomemben rezultat tega poglavja je posplošeni Gaussov izrek. V posebnem primeru, ko integriramo po zaključeni ploskvi, preide v klasični Gaussov izrek, ki pravi, da je integral vektorskega polja po zaključeni ploskvi, enak integralu divergence tega polja po prostornini, ki jo ta ploskev objema. Tudi Stokesov izrek, ki govori o integralu vektorskega polja po zaključeni krivulji, je poseben primer posplošenega Gaussovega izreka. Ta dva izreka, ki sta igrala tako pomembno vlogo pri dokazovanju ohranitvenih zakonov v klasični elektromagnetni in newtonovski gravitacijski teoriji, nadomesti posplošeni Gaussov izrek, ki je ključen za razumevanje praktično vseh ohranitvenih zakonov v teorijah polja. Na koncu tega poglavja bomo na kratko zapisali enačbe elektromagnetnega in gravitacijskega polja v novi obliki in se, upam, prepričali, da so v tej preobleki elegantnejši in preprostejši ter zato laže dojemljivi.

## 10.1 Mnogoterosti v $n$ razsežnih prostorih

V trirazsežnem evklidskem prostoru, ki smo ga vajeni iz vsakdanjega življenja, se zavedamo trirazsežnih mnogoterosti - to so množice točk, ki pripadajo notranjosti geometrijskih teles, dvorazsežnih mnogoterosti, to so množice točk, ki pripadajo površinam in enorazsežnih mnogoterosti, ki so množice točk, ki pripadajo krivuljam. V koordinatnem sistemu  $x, y, z$  lahko opišemo krivuljo s tremi zveznimi in zvezno odvedljivimi funkcijami enega parametra, npr.  $s$ , ki monotonno narašča vzdolž krivulje ( $x = f(s)$ ,  $y = g(s)$ ,  $z = k(s)$ ). Enorazsežna mnogoterost je lahko odsek krivulje, definiran na (odprtem) intervalu, ki ga zavzame parameter  $s$ . Zahteva po neskončni

zvezni odvedljivosti funkcij  $f$ ,  $g$  in  $k$  je postavljena zato, da smemo te funkcije v okolici vsake točke na krivulji na poljubno majhnem intervalu poljubno natančno aproksimirati s Taylrorjevo vrsto. V dovolj majhni okolici točke na krivulji zadošča za opis krivulje le linearni člen v  $s$ , zato je v tej okolici krivulja poljubno natančno aproksimirana z (poljubno majhno) daljico. Premico lahko predstavimo s tremi linearnimi funkcijami parametra  $s$ , npr.:

$$\begin{aligned}x &= s \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + X_0 \\y &= s \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + Y_0 \\z &= s \cos \theta_0 + Z_0\end{aligned}\tag{J.36}$$

Kota  $\theta_0$  in  $\varphi_0$  določata njeno smer, izhodišče pa točka s koordinatami  $X_0$ ,  $Y_0$  in  $Z_0$ .

Na podoben način lahko predstavimo ploskev - dvo-razsežno mnogoterost - s tremi neskončnokrat odvedljivimi funkcijami dveh parametrov  $u$  in  $v$ . Ravnino lahko zapišemo z linearnimi funkcijami:

$$\begin{aligned}x &= e_{11}u + e_{12}v + X_0 \\y &= e_{21}u + e_{22}v + Y_0 \\z &= e_{31}u + e_{32}v + Z_0\end{aligned}$$

Tukaj so  $e_{1,i}$  in  $e_{2,i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) komponente dveh (nekolinearnih) vektorjev, ki ležita v ravnini,  $X_0$ ,  $Y_0$  in  $Z_0$  pa so koordinate ene od točk v ravnini. Enačbe torusa so npr.:

$$\begin{aligned}x &= (a + b \cos v) \cos u \\y &= (a + b \cos v) \sin u \\z &= b \sin v\end{aligned}\tag{J.37}$$

Tu sta  $a + b$  zunanji polmer in  $2b$  debelina torusa.

**Naloga J.4:** Katero ploskev predstavljajo enačbe:

$$\begin{aligned}X &= a \frac{\cos u}{\cosh v} \\Y &= a \frac{\sin u}{\cosh v} \\Z &= a \tanh v\end{aligned}\tag{J.38}$$

Ali znate izraziti to ploskev še s kakimi drugimi koordinatami? Ali lahko uganete katera je tista lepa lastnost koordinat v J.38, zaradi katere so izbrane?

Poljubno kompaktno, odprto množico na ravnini, torusu ali drugi gladki ploskvi, si lahko predstavljamo kot dvorazsežno mnogoterost. Paralelogram je npr. množica točk v ravnini ?? za katere velja  $u_1 < u < u_2$  in  $v_1 < v < v_2$ . Rob paralelograma tvorijo štiri daljice, ki so dane z enačbami 10.2 če postavimo i)  $u = u_1$ ,  $v_1 < v < v_2$ , ii)  $v = v_1$ ,  $u_1 < u < u_2$ , iii)  $u = u_2$ ,  $v_1 < v < v_2$  in iv)  $v = v_2$ ,  $u_1 < u < u_2$ .

Trirazsežno mnogoterost v prostoru si predstavljamo kot notranjost geometrijskega telesa. V trirazsežnem evklidskem prostoru lahko izrazimo koordinate  $x$ ,  $y$  in  $z$  v notranjosti telesa s tremi neskončnokrat odvedljivimi funkcijami treh parametrov  $u$ ,  $v$  in  $w$ . Primer trirazsežne mnogoterosti je odprta množica točk, ki ustrezajo pogojem  $u_1 < u < u_2$ ,  $v_1 < v < v_2$ ,  $w_1 < w < w_2$ . Valj je npr. množica točk, ki ustrezajo pogojem  $r < a$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  in  $0 < z < h$ , pri čemer so koordinate  $x$ ,  $y$  in  $z$  izražene z  $r$  in  $\varphi$  kot:

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z \quad (\text{J.39})$$

V trirazsežnem prostoru seveda ne obstajajo mnogoterosti z dimenzijo večjo od tri. Ni pa si težko predstavljati  $n$  ( $n > 3$ ) razsežnega prostora, v katerem pripada vsaki točki  $n$  kartezičnih koordinat.  $p$ -razsežno mnogoterost v tem prostoru ( $p \leq n$ ) si lahko predstavljamo kot množico točk, katerih kartezične koordinate so neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije  $p$  parametrov.

Povejmo, da ta definicija  $p$ -razsežne mnogoterosti ni najbolj splošna. Mnogoterost smo namreč predstavili kot strukturo, ki je vložena v  $n$ -razsežni evklidski prostor. Eksistenca  $n$ -razsežnega evklidskega prostora pa ni potreben pogoj za eksistenco mnogoterosti. Mnogoterost lahko obstaja ne glede na vložitev v nek več-razsežni evklidski prostor. Temu je tako, ker je geometrija mnogoterosti v sebi zaključena. Z drugimi besedami, vse lastnosti mnogoterosti je mogoče izmeriti samo z meritvami v njej sami; nobena lastnost ni ugotovljiva samo z meritvijo v prostoru, v katerega je ta mnogoterost vložena.

Filozofska razlika med pogledom na mnogoterost kot zaključeno strukturo in na mnogoterost kot del evklidskega prostora je lahko velikanska. Če je prostor-čas mnogoterost - kot večina misli da je - ali je samozadostna struktura ali pa je le del veliko večjega evklidskega prostora? Če je prostor-čas le vloženi podsistem, potem se postavlja vprašanje o pomenu dodatnih dimenzij. Zakaj se potem zavedamo samo štirih dimenzij, kako priti v, oziroma spoznati dodatne dimenzije itd. Taka vprašanja so si ljudje že zastavljali. Iskali in dobili so vložitev nekaterih znanih mnogoterosti, ki ustrezajo rešitvam Einsteinovih enačb gravitacijskega polja. Pokazalo se je, da je razsežnost evklidskega prostora, ki je potreben za vložitev dane mnogoterosti, odvisna od stopnje simetrije mnogoterosti. Čim bolj je mnogoterost simetrična, tem manj dodatnih dimenzij potrebujemo, da jo vložimo v evklidski prostor. Pravijo

pa, da je mogoče v 81 dimenzionalni evklidski prostor vložiti vsako 4-razsežno mnogoterost - lepa tolažba! Lahko rečemo, da ta pogled ni rodil plodnih rezultatov. Opazovanje narave nam ne daje nikakršnega namiga, da bi obstajalo veliko število dodatnih dimenzij prostora, teoretične raziskave pa tudi niso prišle do namigov o prednosti takega pogleda na svet. Zato danes vlada konsenz, da je prostor-čas samozadostna mnogoterost. To prepričanje so še pred nedavnim utrdili mnogi matematiki in fiziki oz. fiziki in matematiki (Penrose, Geroch, Newmann, Rindler in drugi) z več izreki, ki kažejo, da je mogoče nekatere zelo stroge zahteve za to, da bi bila mnogoterost samozadostna struktura celo omiliti pa se samozadostnost še vedno ohranja.

## 10.2 Simpleksične strukture in klinasti produkt

Pomembna lastnost mnogoterosti je njena mera. Za krivuljo je to njena dolžina, za ploskev površina, za geometrijsko telo prostornina itd. Pomembna lastnost mere je ta, da je mera mnogoterosti enaka vsoti njenih sestavin. Krivuljo lahko razrežemo na krajše odseke tako, da ima vsak naslednji odsek začetek, ki je poljubno blizu (a ne pripada) točki, ki je poljubno blizu konca prejšnjega odseka. Površino lahko sestavimo iz samih trikotnikov (triangulacija), prostornino lahko sestavimo iz majhnih tetraedrov in podobno naprej za večrazsežne mnogoterosti. Zato je vredno govoriti o meri podmnogoterosti, katere vse linearne razsežnosti so lahko poljubno majhne, saj lahko sestavimo mnogoterost z večjo mero iz samih majhnih sestavin. Če si predstavljamo  $p$ -mnogoterost vloženo v  $n$ -razsežen evklidski prostor, so koordinate točk, ki ji pripadajo, neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije afinih parametrov. Zato je infinitezimalno kratek odsek 1-razsežne mnogoterosti praktično neločljiv od daljice, površina z majhnimi linearnimi razsežnostmi je praktično neločljiva od ravne ploskve itd. Z drugimi besedami, v dovolj majhni okolici je geometrijska struktura poljubne  $p$  razsežne mnogoterosti prav taka kot geometrijska struktura "enakega" objekta v ravnem (evklidskem) prostoru. Mnogoterost je definirana kot struktura, ki ima to lastnost ne glede na to ali je vložena v nek večrazsežen evklidski prostor ali ne.

Za mero eno-razsežne mnogoterosti vzamemo njeno dolžino. Ugodno pa je daljici pripisati še vektorski značaj, da lahko med seboj ločimo enako dolge, a drugače usmerjene daljice. Pravimo, da daljice spadajo med enodimenzionalne simpleksične strukture. Usmerjane daljice (in vektorje) v poljubno razsežnem prostoru bomo označevali s podčrtanimi malimi črkami kot npr.  $\underline{a}$ .

Najpreprostejša dvorazsežna mnogoterost je trikotnik. Omejujejo ga tri daljice - imenujmo jih  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  in  $\underline{c}$  -, katerih vektorska vsota je enaka 0:

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0 \quad . \quad (J.40)$$



Kot vemo iz elementarne geometrije, je ploščina trikotnika enaka polovici produkta stranice z višino nanjo. Ker lahko izrazimo višino z drugo stranico in kotom med prvo in drugo stranico, mora biti ploščina trikotnika izrazljiva samo z dvema stranicama. Rekli bomo, da pripada ploščini trikotnika dvodimenzionalna simpleksična struktura. Njena velikost je ploščina trikotnika, njen značaj (karkoli že je) pa je značaj dvodimenzionalne simpleksične strukture. To posplošeno ploščino označimo z  $\underline{A}$  in jo zapišemo kot *klinasti produkt* med dvema vektorjema, ki jo določata:

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\underline{a} \wedge \underline{b} \quad (\text{J.41})$$

Lastnosti klinastega produkta morajo biti takšne, da ima ploščina  $\underline{A}$  vse lastnosti, ki sledijo iz osnovnih aksiomov geometrije. Tako je ploščina neodvisna od tega, kateri par med tremi stranicami trikotnika uporabljamo v računu. To zapišemo takole:

$$2\underline{A} = \underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{b} \wedge \underline{c} = \underline{c} \wedge \underline{a} \quad (\text{J.42})$$

Iz izrekov o podobnih trikotnikih sklepamo, da se ploščini dveh enako orientiranih podobnih trikotnikov razlikujeta samo za sorazmernostni faktor, ki je enak razmerju vrednosti ploščin obeh trikotnikov. Ker so pri podobnih trikotnikih istoležne stranice v enakih razmerjih (npr.  $\alpha$ ), mora veljati:

$$(\alpha\underline{a}) \wedge (\alpha\underline{b}) = \alpha^2(\underline{a} \wedge \underline{b}) \quad (\text{J.43})$$

Z osnovnimi sredstvi geometrije znamo izračunati tudi, da se trikotnikova ploščina poveča za  $\alpha$ -krat, če mu raztegnemo stranico  $\underline{a}$  za  $\alpha$ -krat in ohranimo stranico  $\underline{b}$ , stranica  $\underline{c}$  pa se skladno z J.40 spremeni v  $\underline{c} \rightarrow -\alpha\underline{a} - \underline{b}$ . Ta rezultat je preprosta posledica dejstva, da je ploščina trikotnika enaka polovici produkta katerekoli stranice z višino nanjo. Stranica  $\underline{a}$  se je v našem primeru podaljšala za  $\alpha$ -krat, višina na  $\underline{a}$  pa ostaja ista, ker se je stranica  $\underline{b}$  ohranila tako po velikosti kot po smeri glede na  $\underline{a}$ . Zato smemo zapisati:

$$(\alpha\underline{a}) \wedge \underline{b} = \alpha(\underline{a} \wedge \underline{b}) \quad (\text{J.44})$$

Ali še bolj splošno:

$$(\alpha\underline{a}) \wedge (\beta\underline{b}) = \alpha\beta(\underline{a} \wedge \underline{b}) \quad (\text{J.45})$$

Če kombiniramo J.40, J.42 in J.45 dobimo:

$$(\alpha\beta)(\underline{a} \wedge \underline{b}) = (\beta\underline{b}) \wedge (-\alpha\underline{a} - \beta\underline{b}) = -(\alpha\beta)\underline{b} \wedge (\underline{a} + \frac{\beta}{\alpha}\underline{b}) \quad (\text{J.46})$$

Oziroma za vsak par  $\alpha, \beta \neq 0$ :

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge (\underline{a} + \frac{\beta}{\alpha}\underline{b}) \quad (\text{J.47})$$

Za  $\beta \ll \alpha$  dobimo iz gornjega:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a} \quad (\text{J.48})$$

Razen tega mora v skladu z 10.2.7 in 10.2.8 veljati za vsak  $\lambda$ :

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{a} \wedge (\underline{b} + \lambda \underline{a}) \quad (\text{J.49})$$

Odtod sledi, da je operacija  $\wedge$  tudi asociativna. Če namreč ležijo trije vektorji  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  in  $\underline{d}$  v isti ravnini velja

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{d}) = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge \underline{d} \quad (\text{J.50})$$

**Naloga J.5:** Upoštevaj, da lahko zapišemo  $\underline{d}$  kot linearno kombinacijo  $\underline{a}$  in  $\underline{b}$  in pokaži, da sledi J.50 iz prejšnjih trditev.

Pokaže se, da je možno in ugodno, razširiti asociativnost na vse trojice  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  in  $\underline{d}$  ne glede na to ali ležijo v isti ravnini ali ne. Preprosta infinitezimalna trirazsežna mnogoterost je npr. tetraeder. Omejujejo ga štirje trikotniki, katerih stranice so na sl.3 označene z:

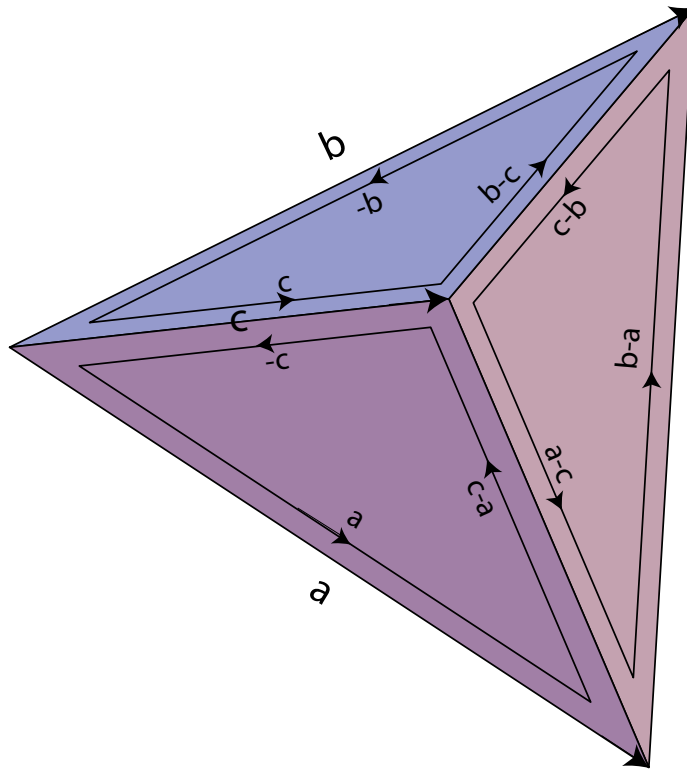
$$\begin{pmatrix} a & c-a & -c \\ a-c & b-a & c-b \\ c & b-c & b \\ -a & b & a-b \end{pmatrix} \quad (\text{J.51})$$

Trikotnike smo orientirali tako, da se vijaki, ki jih vrtimo v smeri, kot jo nakazuje orientacija stranic, vedno odvijajo iz tetraedra. Vsako stranico si vedno delita dva trikotnika in sicer tako, da je stranica v drugem trikotniku vedno orientirana nasprotno tisti v prvem. Tako je npr. prva stranica prvega trikotnika  $-\underline{a}$ , prva stranica drugega trikotnika pa je  $\underline{a}$ , ali druga stranica tretjega trikotnika je  $\underline{c} - \underline{b}$ , tretja stranica četrtega trikotnika pa je  $\underline{b} - \underline{c}$ . Ploščine štirih trikotnikov pa so:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} \quad , \quad \underline{a} \wedge \underline{c} \quad , \quad \underline{b} \wedge (\underline{c} - \underline{b}) \quad \text{in} \quad -(\underline{a} + \underline{b}) \wedge (\underline{a} + \underline{c}) \quad (\text{J.52})$$

Upoštevaje asociativnost klinastega produkta, se hitro prepričamo, da je vsota ploščin trikotnikov, ki omejujejo tetraeder, enaka 0. Ta relacija je analogna J.40. Tudi v splošnem velja, da je vsota  $n - 1$  razsežnih "ploščin", ki zapirajo  $n$  razsežno mnogoterost enaka 0.

**Naloga J.6:** Pokaži, da je vsota ploščin trikotnikov, ki zapirajo kocko, enaka 0.



Slika 3:

Sestavi kocke ali tetraedre v bolj komplicirana telesa in pokaži, da to velja za vsako geometrijsko telo, katerega površino je mogoče triangulirati.

Iz elementarne geometrije vemo, da je prostornina tetraedra enaka tretjini produkta ploščine enega od robnih trikotnikov z višino na ta trikotnik. Zato lahko tudi prostornino zapišemo kot nekakšen produkt treh linearno neodvisnih stranic, ki tvorijo tetraeder. Po analogiji z 10.2.2 pripišemo prostornini tetraedra tridimenzionalno simplektično strukturo:

$$\underline{V} = \frac{1}{3!} \underline{a} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c} \quad (\text{J.53})$$

Premišljajmo podobno kot pri trikotniku! Iz elementarne geometrije sklepamo, da veljajo naslednje trditve:

Prostornine enako orientiranih podobnih tetraedrov se razlikujejo samo za sorazmer-

nostni faktor, to je:

$$(\alpha \underline{a}) \bullet (\alpha \underline{b}) \bullet (\alpha \underline{c}) = \alpha^3 (\underline{a} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c}) \quad (\text{J.54})$$

Če raztegnemo tetraedru npr. stranico  $\underline{a}$  v osnovni ploskvi za  $\alpha$ -krat, se ploščina osnovne ploskve poveča za  $\alpha$ -krat, višina tetraedra pa ostane nespremenjena. Prostornina novega tetraedra je tako  $\alpha$ -krat večja od originalne. Postopek ponovimo še z drugo in tretjo stranico. Tako sklepamo, da velja za raztegnjeni tetraeder:

$$(\alpha \underline{a}) \bullet (\beta \underline{b}) \bullet (\gamma \underline{c}) = \alpha \beta \gamma (\underline{a} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c}) \quad (\text{J.55})$$

Prav tako mora biti vseeno s katero trojico izmed linearno neodvisnih vektorjev, ki definirajo tetraeder, izrazimo njegovo prostornino (Glej J.42, ki je analogna relacija veljavna za trikotnik. Kot pri trikotniku, je treba tudi pri tetraedru paziti na orientacijo!). Zato mora veljati:

$$(-\underline{a}) \bullet (-\underline{b}) \bullet \underline{c} = \underline{a} \bullet \underline{c} \bullet (-\underline{b}) = \underline{b} \bullet (\underline{c} - \underline{b}) \bullet (\underline{a} + \underline{b}) = (-\underline{a} - \underline{b}) \bullet (\underline{a} + \underline{c}) \bullet (-\underline{a}) \quad (\text{J.56})$$

Zveze J.55 in J.56, so analogne J.45 in J.47. Izpolnjene so lahko le, če je operacija " $\bullet$ " asociativna, distributivna in antisimetrična glede na zamenjavo kateregakoli para vektorjev. To zapišemo v obliki:

$$(\alpha \underline{a} + \beta \underline{d}) \bullet \underline{b} \bullet \underline{c} = \alpha (\underline{a} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c}) + \beta (\underline{d} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c}) \quad (\text{J.57})$$

in

$$\underline{a} \bullet \underline{b} \bullet \underline{c} = -\underline{b} \bullet \underline{a} \bullet \underline{c} = \underline{b} \bullet \underline{c} \bullet \underline{a} = -\underline{c} \bullet \underline{b} \bullet \underline{a} \quad \text{etc.} \quad (\text{J.58})$$

Operacija  $\bullet$  ima torej enake lastnosti kot operacija  $\wedge$ . Zato smo upravičeni nadomestiti " $\bullet$ " z " $\wedge$ " v vseh gornjih izrazih.

Operacijo klinasti produkt je mogoče razširiti na produkt poljubnega števila vektorjev. Tako razširjeni klinasti produkt je antisimetričen glede na zamenjavo kateregakoli para faktorjev, asociativen in distributiven. V trirazsežnem prostoru je razširitev na produkt več kot treh vektorjev trivialna ali pa nesmiselna, saj je klinasti produkt med štirimi vektorji identično enak 0. Temu je tako, ker obstajajo v 3-razsežnem prostoru največ trije linearno neodvisni vektorji. Zato je četrti vektor, ki bi nastopal v klinastem produktu, nujno linearna kombinacija prvih treh. Po aksiomu o distributivnosti lahko tak produkt razstavimo na vsoto treh produktov s po štirimi vektorji. V vsakem sumandu nastopa po en vektor dvakrat. Ker pa je klinasti produkt antisimetričen, je vsak sumand enak nič. Ta rezultat odraža dejstvo, da obstajajo v 3-razsežnem prostoru samo točke (0-dimenzionalne simpleksične strukture), daljice (1-dimenzionalne simpleksične strukture), površine (2-dimenzionalne

strukture) in prostornine (3-dimenzionalne simplektične strukture) - več kot tridimenzionalnih struktur pa v 3-razsežnem prostoru ni. V štirirazsežnem prostoru pa je od nič različen še klinasti produkt štirih linearno neodvisnih vektorjev, v pet-razsežnem prostoru petih vektorjev itd.

### 10.3 n-forme

V prejšnjem poglavju smo govorili o simplektičnih strukturah v  $n$ -razsežnih mnogoterostih. Primer 1-razsežnih struktur so daljice, dvorazsežnih struktur so površine, trirazsežnih prostornine. V več kot tri-razsežnih mnogoterostih se ta hierarhija nadaljuje do  $n$ -razsežnih prostornin.

Daljice v prostoru niso edine strukture, ki imajo velikost in smer. Tudi druge fizikalne količine kot hitrost, gibalna količina, sila, tok itd. predstavljamo z vektorji, ki imajo, podobno kot daljice, smer in velikost. Videli bomo, da obstajajo tudi fizikalne količine, ki imajo enake transformacijske lastnosti kot dvorazsežne simplektične strukture, obstajajo pa tudi take, ki imajo lastnosti 3-razsežnih simplektičnih struktur. V nekaterih sodobnih teorijah polja v več razsežnih (npr. 10) prostorih (Matematično korektno bi bilo uporabiti izraz mnogoterosti, vendar smo fiziki vendarle navajeni govoriti o prostoru kot o "tistem" kjer smo; o tej razliki med matematičnim in fizikalnim pojmovanjem prostora bo še govora.) se je treba ukvarjati s prav komplicirano simplektično strukturo.

Mnoge fizikalne količine kot npr. hitrostno polje, elektromagnetno polje itd. imajo enake transformacijske lastnosti (glede na Galilejeve ali pa Lorentzove transformacije) kot simplektične strukture. Hitrostno polje si npr. predstavljamo kot polje vektorjev, ki so orientirani vzdolž infinitezimalnih daljic v prostoru. Primer bolj komplicirane strukture sta par električno in magnetno polje, ki ju bomo spoznali kot komponente dvodimenzionalne simplektične strukture. V tem poglavju bomo zato govorili o  $p$ -formah, ki omogočajo opisati vektorska in bolj komplicirana polja v  $n$ -razsežnih prostorih na način, ki ni odvisen od izbire koordinat.

Najpreprostejši element simplektične strukture je točka. Prvo, kar potrebujemo, če hočemo urediti točke v prostoru, je to, da jih znamo označiti. Za fizika označujejo točke v prostoru fizikalni parametri, ki jih moremo v njih izmeriti. V trirazsežnem prostoru, kakršnega se zavedamo, potrebujemo tri različne fizikalne parametre, da lahko enolično določimo položaj. Primer takih treh fizikalnih parametrov so npr. tri kartezične koordinate  $x$ ,  $y$  in  $z$  ali tri sferne koordinate  $r$ ,  $\theta$  in  $\varphi$  ali tri cilindrične koordinate  $R$ ,  $z$ ,  $\varphi$ . Trdimo, da lahko imamo npr.  $x$ ,  $y$  in  $z$  fizikalne količine zato, ker jih določim s fizikalnim procesom npr. z radarsko meritvijo razdalj ali z odčitavanjem kotomerov. Še "bolj fizikalno" je npr. določanje položaja podmornic.

Ena od navigacijskih naprav v podmornici je merilec pospeška. Po dvakratni integraciji pospeška dobijo pretečeno pot, za kontrolo pa si pomagajo seveda s podatkom o relativni hitrosti podmornice glede na vodo. Ta tkim. inercialni navigacijski sistem po daljšem času plovbe akumulira napako, zato ga je treba občasno kalibrirati še drugače. Globino podmornice izračunajo iz velikosti vodnega tlaka. Drugi dve koordinati pa mora kapitan podmornice določiti na še bolj zvit način. Dosegljivi fizikalni podatek je npr. globina morja, ki jo je mogoče izmeriti s sonarjem. S pomočjo pomorske karte globin morja, izdelane posebej za te namene, podmorničarji določijo svoje mesto nad podmorsko izohipso, pri tem pa jim pomaga tudi razgibanost terena na poti do te izohipse in podatek inercialnega navigacijskega sistema. Vse podatke, ki jih je dobil, kapitan strne v tri številke: globino, geografsko širino in geografsko dolžino. Izkušnja nas uči, da s temi tremi podatki enolično določimo lego podmornice ali katerega drugega objekta. Zato pravimo, da je naš prostor trirazsežen. V  $n$  razsežnem prostoru pa potrebujemo  $n$  različnih fizikalnih parametrov, ki imajo to lastnost, da vsaj v izbrani okolici ne zavzamejo istega nabora vrednosti v različnih točkah v prostoru. Tak nabor parametrov imenujemo koordinate. Razen koordinat obstajajo še druge fizikalne količine, ki zavzamejo številske vrednosti v točkah prostora. Množico fizikalnih parametrov, ki zavzamejo številske vrednosti v točkah prostora, imenujemo 0-forme. Kot povedano, potrebujemo v  $n$  razsežnem prostoru  $n$  "primernih" koordinatnih 0-form. Izbira koordinatnih 0-form ni evidentna, ampak je odvisna od naše presoje. Pogosto si izberemo tiste koordinate, ki najbolje odražajo simetrije problema s katerim imamo opravka, ali pa tiste, ki jih najlažje in najnatančneje realiziramo z meritvijo<sup>8</sup>. Pri mehanskih problemih, posebej v prostoru brez sil, se ponujajo kartezične koordinatne 0-forme  $x$ ,  $y$  in  $z$  oziroma  $ct$ ,  $x$ ,  $y$  in  $z$ , če obravnavamo gibanje relativistično. Lepa simetrija enačb gibanja zapisanih v jeziku kartezičnih koordinatnih 0-form je odraz simetrije prostora, torej relacij, ki jih narava diktira med fizikalnimi strukturami v različnih točkah prostora.

Enodimenzionalne mnogoterosti so krivulje. Izražamo jih tako, da povemo po katerih koordinatah (večje mnogoterosti ali pa prostora) se gibljemo, ko jih opisujemo<sup>9</sup>. V  $n$ -razsežnem prostoru predstavimo krivuljo z  $n$  koordinatami kot (neskončnokrat)

---

<sup>8</sup>Pomen možnosti realizacije koordinatnega sistema se je pokazal v izredno ostri luči takrat, ko so radijski astronomi hoteli ugotoviti kateri optični objekti se nahajajo na lokacijah radijskih virov. Problem se je ponovil še z rentgensko in infrardečo astronomijo

<sup>9</sup>Pojem krivulje ne zahteva natančne definicije pojma dolžine poti ali celo pojma okolice. S tem, da smo npr. povedali, da se je avtomobilist odpeljal izpred pošte v Ljubljani preko Bežigrada, Domžal, Trojan do Celja smo opisali krivuljo, ki sobesedniku, ki pozna našete kraje, povsem zadovoljivo opiše za katero pot gre, čeprav ne ve natančno kako daleč je Bežigrad od ljubljanske pošte ali kako daleč so Trojane od Celja in čeprav se ne spominja natanko vseh ovinkov na poti od Ljubljane do Celja.

odvedljivimi funkcijami afinega parametra ( $\lambda$ ; za fizika je tak parameter pogosto čas.)

$$C : x^i = \xi^i(\lambda) \quad (\text{J.59})$$

Povedali smo že, da je dovolj kratek odsek krivulje poljubno podoben daljici, to je enodimenzionalni simplektični strukturi. Vsa informacija, ki jo potrebujemo o taki daljici, če imamo že definiran koordinatni sistem je ta, za koliko se spremene koordinate med začetkom in koncem daljice. V ta namen definiramo koordinatne 1-forme kot operatorje, ki merijo prirastke posameznih koordinat vzdolž poti po krivulji. Naj bo  $\wp_0$  točka na krivulji v kateri zavzame afini parameter vrednost  $\lambda_0$ . Če delujemo s koordinatno 1-formo  $\mathbf{d}x^{i_0}$  na krivuljo  $C$  v točki  $\wp_0$ , dobimo infinitezimalni prirastek koordinate  $x^{i_0}$ , to je:

$$\mathbf{d}x^{i_0}[C]|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{d\xi^{i_0}}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_0} d\lambda \quad (\text{J.60})$$

(Od tu naprej bomo ponavadi v zapisu izpuščali eksplicitno določilo točke  $|\lambda=\lambda_0$ ). Koordinatne 1-forme linearno kombiniramo v splošne 1-forme, ki jih bomo navadno označevali z malimi črkami in indeksom "1" v oklepaju. Tako je npr.:

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) \mathbf{d}x^i \equiv f_i \mathbf{d}x^i \quad (\text{J.61})$$

Pri tem so  $f_i(x^1, \dots, x^n)$  komponente 1-forme  $f^{(1)}$  glede na koordinate (bazo 0-form)  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Te komponente so lahko v splošnem funkcije položaja.

Definicija J.60 je smiselna le, če je linearna kombinacija 1-form tudi 1-forma. To pomeni: če sta  $f^{(1)}$  in  $g^{(1)}$  dve 1-formi, potem je njuna linearna kombinacija 1-forma, ki takole deluje na krivulje:

$$(\alpha f^{(1)} + \beta g^{(1)})[C] = \alpha f^{(1)}[C] + \beta g^{(1)}[C] \quad , \quad (\text{J.62})$$

pri čemer velja ta zveza za vsako krivuljo  $C$ . Matematiki pravijo, da tvorijo 1-forme  $n$  razsežen vektorski prostor v vsaki točki mnogoterosti.

Pojem 1-form je koristen za opis kinematike. O dinamičnih modelih gibanja pa samo v njihovem okviru ne moremo razmišljati. Vpeljati moramo še pojem ločne dolžine. V prejšnjih poglavjih smo namreč spoznali, da tako v Newtonovi mehaniki kot v teoriji relativnosti definicija ločnega elementa določa enačbe gibanja za proste delce.

Ločne dolžine na Zemlji (za tiste čase na ravnini) so določali že stari narodi Asirci, Babilonci, Egipčani itd. na ta način, da so s standardnimi palicami merili odseke

poti med imenovanimi točkami ( točkami z znanimi koordinatami) na obdelovalni površini. Pri samih merivah so se pokazale določene zakonitosti, ki so jih kasneje vgradili v aksiome evklidske geometrije. Obstoj premic in krogov se je npr. zdel tako evidenten, da evklidska geometrija o njih ne izgublja besed, ampak jih jemlje kot same ob sebi umevne. Po današnjih predstavah o prostoru premice niso tako samoumevne. Raje izhajamo iz preprostejših aksiomov. Verjamemo, da je med dvema različnima točkama vedno mogoče najti vsaj eno pot - krivuljo, ki ju povezuje. Samoumevno se nam zdi tudi, da je krivuljo vedno mogoče deliti na manjše in manjše dele. Dolžino dovolj majhnega dela še vedno določimo kot stari narodi. Primerjamo jo z dolžino stadardnega materialnega objekta (metra)<sup>10</sup>. Celotno dolžino krivulje med dvema točkama definiramo kot vsoto dolžin njenih delov. Da je v prostoru (vsaj na omejenem delu prostora) mogoče poimenovati točke s tremi koordinatami  $x$ ,  $y$  in  $z$  tako, da se razdalja med bližnjimi točkami zapiše kot v A.6 (vsaj z omejeno natančnostjo, ki nam je danes dosegljiva) pa je že stvar netrivialne izkušnje. Na teh spoznanjih lahko zgradimo evklidsko geometrijo.

Naj bo  $C$  krivulja v 3-razsežnem prostoru podana s časovno odvisnostjo kartezičnih koordinat  $x^i = \xi^i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$  in seveda  $x^1 \equiv x$ ,  $x^2 \equiv y$  in  $x^3 \equiv z$ ), ki so funkcije časa ( $t$ ). Če položimo 1-formo  $\mathbf{d}x$  na krivuljo  $C$ , dobimo po J.60 prirastek koordinate  $x$  v času  $dt$ , to je  $\frac{d\xi^1}{dt}dt$ . Podobno je  $\mathbf{d}y[C] = \frac{d\xi^2}{dt}dt$  in  $\mathbf{d}z[C] = \frac{d\xi^3}{dt}dt$ . Dolžina odseka, ki ga krivulja opiše v času  $dt$  je po A.6:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^3}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{J.63})$$

V jeziku 1-form lahko ta izraz, oziroma njegov kvadrat, zapišemo v takole:

$$ds^2 = \mathbf{d}x^1[C] \cdot \mathbf{d}x^1[C] + \mathbf{d}x^2[C] \cdot \mathbf{d}x^2[C] + \mathbf{d}x^3[C] \cdot \mathbf{d}x^3[C] \quad (\text{J.64})$$

Iz tega izraza smo v uvodnih poglavjih izpeljali ključne simetrijske lastnosti prostora, zato je razumljivo, da ga želimo zapisati v jeziku 1-form na čimbolj kompakten način. V ta namen definiramo *direktni produkt* dveh form z naslednjim predpisom: Naj bosta  $a^{(1)}$  in  $b^{(1)}$  dve 1-formi. Njun direktni produkt  $a^{(1)} \otimes b^{(1)}$  je binarni operator, ki deluje na dve krivulji tako, da je za poljubni dve krivulji  $C_1$  in  $C_2$  vrednost operatorja  $a^{(1)} \otimes b^{(1)}[C_1][C_2]$  enaka produktu vrednosti 1- forme  $a^{(1)}$  položene na prvo krivuljo, pomnoženi z vrednostjo 1-forme  $b^{(1)}$  položene na drugo krivuljo. To je:

$$a^{(1)} \otimes b^{(1)}[C_1][C_2] = (a^{(1)}[C_1])(b^{(1)}[C_2]) \quad (\text{J.65})$$

---

<sup>10</sup>Na tej točki se fizik močno razlikuje od matematika. Fizik namreč pristane, da je krivuljo mogoče drobiti do neke najmanjše dolžine, ki je morda stvar eksperimentalne spretnosti ali pa je celo določena z naravo snovi, to je z velikostjo atoma, jedra ali še česa. Za razliko od fizika si matematik predstavlja, da je mogoče poljubno krivuljo razpolavljati v nedogled.



Kasneje se bomo ukvarjali še z 2-formami, 3-formami itd., ki delujejo na ploskve, prostornine itd. Tudi med temi operatorji bomo definirali direktni produkt kot binarni operator, katerega vrednost je za vsako dvojico struktur enaka produktu vrednosti obeh operatorjev položenih na svojo stukturo.

Vrnimo se k ločnemu elementu J.63! Z direktnim produktom zapišemo:

$$ds^2 = \delta_{ik} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^k [C][C] \quad (\text{J.66})$$

Indeksa  $i$  in  $k$  tečeta tu od 1 do 3, v  $n$ -razsežnem evklidskem prostoru pa seveda od 1 do  $n$ .

**Naloga J.7:** Prepričaj se, da smemo v skladu z J.65 zapisati:

$$\mathbf{d}x \otimes \mathbf{d}y [C_1][C_2] = dx_{(1)} dy_{(2)} = \frac{dx_{(1)}}{dt} \frac{dy_{(2)}}{dt'} dt dt' \quad , \quad (\text{J.67})$$

pri čemer smo z  $x_{(1)}(t)$ ,  $y_{(1)}(t)$  in  $z_{(1)}(t)$  označili točke na prvi krivulji ( $C_1$ ), z  $x_{(2)}(t')$ ,  $y_{(2)}(t')$  in  $z_{(2)}(t')$  pa točke na drugi krivulji ( $C_2$ ). Na osnovi tega se prepričaj, da je zapis ločnega elementa J.66 ekvivalenten J.63!

Enačba J.66 pove vse o medsebojnih razdaljah med točkami v prostoru in s tem določa gibalne enačbe za proste delce v tem prostoru. Ta izjava je današnji destilat dolgoletne izkušnje, da še telesa, na katere ne deluje nobena sila, gibljejo enakomerno in premočrtno". V bolj formalnem jeziku lahko rečemo, da je J.66 najpreprostejša realizacija koordinat v prostoru (pravzaprav v mnogoterosti), v katerem je dinamika prostih delcev invariantna glede na Galilejeve transformacije. Prav je, da se ob tem spomnimo, da je trajalo zelo, zelo dolgo, da smo se ljudje zavedeli zveze med Galilejevo invariantnostjo gibalnih enačb in aksiomi evklidske geometrije. Že v trinajstem stoletju je npr. Nikolaj Kuzanski razmišljal o tem, da je premočrtno enakomerno gibanje videti tako iz vseh sistemov, ki se med seboj gibljejo premo in enakomerno. Vendar je Galileo Galilei šele v 17. stoletju jasno postavil zakon vztrajnosti. Gibalne enačbe za delce pa je končno formuliral Isaac Newton skoraj sto let kasneje. Formalna slika o povezavi med geometrijo prostora in dinamiko delcev v njem, čeprav že povdarjena pri Newtonu, je nastala šele mnogo kasneje z razvojem analitične mehanike. Lahko rečemo, da je postala kompletna šele koncem prejšnjega stoletja, to je takrat, ko je tako težko pridobljena predstava o Galilejevo invariantnem prostoru začela pokati. Lorentz, Poincaré in drugi so slutili, da Galilejeva invariantnost ni natančna, vendar je bilo treba počakati Einsteina, da je jasno postavil invariantnost prostora

glede na Poincaréjevo grupo kot naravni zakon, ki bolje kot Galilejeva invariantnost opiše realni prostor in geometrijo v njem. Zato danes smatramo, da označuje ime "teorija relativnosti" relativiziranje pojmovanja prostora in ne povdarka na relativnost gibanja, kot so mnogi menili na začetku. Obe Einsteinovi teoriji - specialna in splošna teorija relativnosti - namreč obravnavata prostor kot živo areno, kjer se svet dogaja in ne kot golo matematično strukturo, ki izvira iz Evklidove geometrije (Ta aspekt Einsteinove teorije so močneje povdarakili šele njegovi nasledniki kot J.A. Wheeler in B.S. DeWitt.). Strukturo prostora lahko razumemo le preko realne izkušnje z opazovanjem dogodkov, ki jih Narava režira v tej areni. To, da opišemo dinamiko delcev bolj natančno v 4-razsežnem prostoru, v katerem je mogoče zapisati ločni element v obliki:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu [C][C] \quad , \quad (\text{J.68})$$

lahko smatramo kot stvar izkušnje, do katere smo prišli z opazovanjem narave. Splošna relativnost, ki ugotovi, da tudi taka posplošitev ne zadostuje za opis dogajanja v prostoru, je v tem pogledu naravna razširitev ideje, da je prostor samo tak kot ga zaznamo. Najbolje ga opišem takrat, ko se napovedi dobro ujema s tem, kar se v naravi v resnici zgodi. Novo razumevanje prostora zahteva tudi nov pogled na geometrijo in temu je namenjeno to poglavje.

Algebra 1-form in naprej algebra  $p$ -form je konstruirana tako, da so topološke relacije (kako je kaj povezano) kar najbolj ločene od metričnih relacij (kako je kaj daleč). Zato je v tem jeziku možno gledati na newtonovsko fiziko, specialno relativnost in splošno relativnost iz podobne perspektive. Vsaka od teh teorij operira s prostorom, ki ima določene simetrijske lastnosti.

Ključna lastnost newtonovske dinamike je ta, da je gibanje prostih delcev invariantno glede na Galilejeve transformacije. Lahko rečemo, da ta lastnost določa prostor v katerem se fizika dogaja. Najbolj simetrično poimenovanje točk v takem prostoru dajo 3 kartezične koordinate  $x$ ,  $y$  in  $z$ , v katerih se ločni element izraža z J.66. Spoznanje specialne teorije relativnosti je, da je Galilejeva invariantnost le približna, ker kaže dinamika delcev in polj, ki se relativno gibljejo z velikimi hitrostmi Poincaréjevo invariantnost. Polnega delovanja Poincaréjeve grupe ne moremo realizirati v 3-razsežnem prostoru, zato potrebujemo vsaj 4 razsežnosti. Tudi v tem prostoru so najbolj simetrične štiri kartezične koordinatne 0-forme  $x^0$ ,  $x$ ,  $y$  in  $z$  ( $x^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ ) in z ločnim elementom, ki se izraža z J.68. Splošna relativnost pravi, da tudi Poincaréjeva invariantnost ni natančna, ampak velja samo lokalno. Mogoče je reči, da pripelje zahteva, naj se lokalna Poincaréjeva invariantnost ohranja, do štirih dimenzij prostor-času. Zaradi izpada translacijske invariantnosti pa je mogoče pripisati prostoru dinamične spremenljivke. V splošni relativnosti so to komponente tenzorja, ki izraža ločni element v obliki 4.21. Sodobne supersimetrijske in poenotene

teorije polja gredo še naprej. Izhajajo iz domneve, da je lokalna Poincaréjeva grupa le del večje simetrijske grupe, ki vlada v Naravi. Katera je tista grupa ne vemo. Vsekakor kaže, da bo realizacija višje simetrijske grupe zahtevala več kot 4-razsežen prostor. Pred nekaj leti se je zdelo, da so v 10-razsežnem prostoru uspeli najti zelo zanimivo vseobsegajočo teorijo - po angleško "string theory". Danes teoretiki niso več tako zelo navdušeni nad njo. Morda predvsem zato, ker je računanje v 10 dimenzijah tako komplicirano, da je težko priti do preverljivih napovedi. Ideja, da simetrija določa areno, v kateri se fizika dogaja, pa je še kako živa in tudi to opravičuje naš izlet med geometrijske strukture v  $n$ -razsežnih prostorih, čeprav se ne bomo ukvarjali s teorijami, ki so bolj komplicirane od splošne relativnosti.

### 10.3.1 1-forme in vektorska polja

Vsaki 1-formi lahko na naraven, od koordinat neodvisen način, priredimo vektorsko polje  $\underline{f}$  po naslednjem premisleku. V izbrani točki mnogoterosti (pri tem imam v mislih tisto, čemur fizik reče prostor, vendar je v  $n$ -razsežnih mnogoterostih gotovo korektnije uporabljati matematični izraz)  $\varphi$ , skozi katero teče krivulja  $C$  tvorimo izraz:

$$T_f(\varphi) \equiv \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}[C]}{ds} \quad (\text{J.69})$$

Pri tem je  $ds$  dolžina loka na krivulji  $C$  v okolici točke  $\varphi$ . Limita  $T_f(\varphi)$  gotovo eksistira v vsaki izbrani točki prostora ( $\varphi$ ) za vsako krivuljo  $C$ , ki gre skozi  $\varphi$ <sup>11</sup>. Vrednost izraza  $T_f(\varphi)$  je odvisna samo od smeri krivulje skozi točko  $\varphi$ . Izraz  $T_f(\varphi)$  pa zavzame maksimalno vrednost za eno samo, dobro definirano smer skozi točko  $\varphi$ . Vektorju  $\underline{f}(\varphi)$ , ki ustreza 1-formi  $f^{(1)}$  v točki  $\varphi$  zato priredimo to smer, njegova velikost ( $|\underline{f}|$ ) pa je maksimalna velikost  $T(\varphi)$ .

Oglejmo si ta mehanizem v ravnem prostoru in v kartezični koordinatni bazi, kjer je  $ds[C] = \sqrt{\sum \mathbf{d}x^i[C] \cdot \mathbf{d}x^i[C]}$ . Izraz  $T_f$  zapišemo takole:

$$T_f(\varphi) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}[C]}{ds} \Big|_{\varphi} = \frac{f_1 \dot{x}^1 + f_2 \dot{x}^2 + f_3 \dot{x}^3}{\sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}} \quad (\text{J.70})$$

Očitno je gornja limita odvisna le od normiranih hitrosti  $\frac{\dot{x}^i(\lambda)}{\sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}}$ , to je od smeri krivulje  $C$  v izbrani točki  $\varphi$ . Izraz J.70 doseže ekstrem za krivuljo, katere

<sup>11</sup>Eksistenco limite lahko razumemo, če se spomnimo, da so v okolici točke  $\varphi$  koordinate točk na krivulji in komponente 1-forme po definiciji (neskončnokrat) zvezno odvedljive funkcije afnega parametra ( $\lambda$ ).

hitrost ima komponente ( $\xi^i(\lambda)$ ) sorazmerne komponentam 1-forme ( $f_i$ ). Maksimalna velikost izraza  $T_f$  v točki  $\wp$ , to je velikost prirejenega vektorja  $|\underline{f}(\wp)|$  pa je:

$$|\underline{f}| = \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \quad (\text{J.71})$$

**Naloga J.8:** Naj bodo  $\nu^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) neodvisne spremenljivke vezane s pogojem  $\sum_{i=1}^n (\nu^i)^2 = 1$ ,  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) pa dana števila. Pokaži, da doseže izraz:

$$S = \sum_{i=1}^n (f_i \nu^i) \quad (\text{J.72})$$

maksimum, kadar velja  $\nu^i = \sigma f_i$ , pri čemer je  $\sigma$  poljubna pozitivna konstanta. (Metoda Lagranževih multiplikatorjev je zelo primerna za ta namen.)

V kartezični koordinatni bazi, kjer smo konstruirali preslikavo med 1-formami in vektorskimi polji, se lahko ekslicitno prepričamo, da je tako definirana preslikava obratno enolična in linearna. Ker je sama preslikava definirana na od koordinat neodvisen način, zahtevamo njeno obratno enoličnost in linearnost v poljubnem koordinatnem sistemu ali celo v poljubni mnogoterosti. To pomeni: če sta  $\underline{f}$  in  $\underline{g}$  vektorski polji, ki ustrezata 1-formam  $f^{(1)}$  in  $g^{(1)}$ , potem ustreza linearni kombinaciji  $\alpha f^{(1)} + \beta g^{(1)}$  linearna kombinacija ustreznih vektorskih polj. Torej če:

$$f^{(1)} \implies \underline{f} \quad \text{in} \quad g^{(1)} \implies \underline{g} \quad (\text{J.73})$$

potem velja

$$\alpha f^{(1)} + \beta g^{(1)} \implies \alpha \underline{f} + \beta \underline{g} \quad (\text{J.74})$$

Lastnost J.74 pove kako seštevamo vektorska polja, če znamo seštevati 1-forme (Seštevanje 1-form pa je po J.62 navadno seštevanje števil.). Zaradi te lastnosti lahko enolično razstavimo vektorska polja v komponente vzdolž baznih vektorjev, ki jih lahko definiramo v poljubnem koordinatnem sistemu. Tako kot bazne 1-forme, so tudi bazna vektorska polja stvar dogovora. Običajno jih definiramo z ozirom na izbrani koordinatni sistem. V  $n$ -razsežnem prostoru potrebujemo  $n$  baznih vektorskih polj. Ponavadi (ni pa nujno) izberemo za bazna vektorska polja  $\underline{e}_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) polja tangent na krivulje  $C_i$ , vzdolž katerih narašča samo ustrezna koordinata  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Velja poudariti, da se tako definirano bazno vektorsko polje v splošnem

ne ujema z vektorskim poljem, ki je po gornjem naravnem predpisu prirejeno baznim 1-formam  $\mathbf{d}x^i$ .

Pokažimo kako v okviru takega dogovora izražamo komponente vektorskega polja  $f$ , ki ustreza 1-formi  $f^{(1)} = f_i \mathbf{d}x^i$ ! Zaradi linearnosti in obratne enoličnosti preslikave med vektorji in 1-formami (J.74) se lahko naloge lotimo po korakih. Najprej poiščemo 1-forme  $\mathbf{e}^k$ , ki po J.74 ustrezajo baznim vektorskim poljem  $\underline{e}_k$ . Kot vse 1-forme jih lahko zapišemo kot linearne kombinacije baznih 1-form:  $\mathbf{e}^k = e^k_i \mathbf{d}x^i$ . Vemo, da je bazni vektor  $\underline{e}_k$  tangenta na krivuljo  $C_k$  vzdolž katere narašča samo  $k$ -ta koordinata in da krivulja  $C_k$  maksimizira izraz  $T_{\mathbf{e}^k}$ . Torej:

$$\underline{e}_k \quad \text{je tangenta na krivuljo} \quad \begin{pmatrix} X_0^1 \\ X_0^2 \\ \vdots \\ X_0^k + \sigma \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix} \quad (\text{J.75})$$

Pri tem so  $X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^n$  koordinate točke  $\wp$ , v kateri želimo konstruirati bazni vektor  $\underline{e}_k(\wp)$ . V splošnih koordinatah, kjer se ločni element zapiše v obliki:

$$ds^2 = g_{ik} \mathbf{d}x^i[C] \mathbf{d}x^k[C] \quad , \quad (\text{J.76})$$

se  $T_{\mathbf{e}^k}$  izraža takole:

$$T_{\mathbf{e}^k}(\wp) = \frac{e^k_i \mathbf{d}x^i[C]}{ds} = \frac{e^k_i \dot{\xi}^i}{\sqrt{g_{lm} \dot{\xi}^l \dot{\xi}^m}} \quad (\text{J.77})$$

Poiskati moramo take komponente  $e^k_i$ , da bo krivulja J.75 ekstremalna za  $T_{\mathbf{e}^k}$  v zgoraj opisanem smislu. Ker je izpolnitev ekstremalnega pogoja tu odvisna le od smeri hitrosti (tako kot pri J.70) in ne od njene velikosti, smemo komponente  $\dot{\xi}^k$  vezati še z dodatnim pogojem. Izberemo:  $g_{ik} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k = 1$ . Ekstrem izraza:

$$S = e^k_i \dot{\xi}^i - \frac{1}{2} \lambda g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j \quad (\text{J.78})$$

iščemo z Lagranžovo metodo pri pogoju:

$$g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = 1 \quad (\text{J.79})$$

Ekstrem je dosežen, kadar so odvodi  $S$  po vseh komponentah hitrosti enaki 0, to je:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\xi}^i} = e^k_i - \lambda g_{lm} \dot{\xi}^m = 0 \quad (\text{J.80})$$

Ker mora biti rešitev tega sistema enačb krivulja  $C_k$ , vzdolž katere narašča samo  $k$ -ta koordinata, mora biti  $\dot{\xi}^i = 0$  če  $i \neq k$ . Za  $i = k$  pa je vrednost odvoda različna od nič; v našem primeru jo diktira vez J.79. Tako je  $\dot{\xi}^k = 1/\sqrt{g_{kk}}$ . V splošni obliki pa zapišemo  $\dot{\xi}^i = 1/\sqrt{g_{kk}}\delta^{ik}$ . Komponente bazne 1-forme, ki ustreza krivulji  $C_k$  (to je baznim vektorjem  $\underline{e}_k$ ) so po J.80:

$$e^k_i = \frac{\lambda}{\sqrt{g_{kk}}}\delta^{kl}g_{li} \quad (\text{J.81})$$

Vrednost Lagranževega multiplikatorja  $\lambda$  je določena z normalizacijo 1-forme  $\mathbf{e}^k$ . Ponavadi izberemo  $\mathbf{e}^k$  tako, da je

$$\mathbf{e}^k[C_k] = d\sigma \quad (\text{J.82})$$

Zato je po J.77 in J.82:

$$T_{\mathbf{e}^k}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \quad (\text{J.83})$$

Ko to primerjamo z J.81, ugotovimo, da mora biti  $\lambda = \sqrt{g_{kk}}$  in 1-forma  $\mathbf{e}^k$  se izraža v obliki:

$$\mathbf{e}^k = \delta^{kl}g_{lm}\mathbf{d}x^m \quad (\text{J.84})$$

Bazne 1-forme ( $\mathbf{d}x^k$ ) lahko sedaj izrazimo z 1-formami  $\mathbf{e}^k$ , prirejenimi baznim vektorjem. V ta namen potrebujemo matrični obrat metričnega tenzorja. Elemente te inverzne matrike označimo z  $g^{ik}$  in velja:

$$g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l, \quad (\text{J.85})$$

Tako dobimo iz J.84:

$$\mathbf{d}x^l = g^{lm}\delta_{km}\mathbf{e}^k \quad (\text{J.86})$$

Preslikava J.74 torej priredi 1-formi  $\mathbf{d}x^l$  linearno kombinacijo baznih vektorjev:

$$\mathbf{d}x^l \implies g^{lm}\underline{e}_m, \quad (\text{J.87})$$

oziroma 1-formi  $f^{(1)}$  vektorsko polje  $\underline{f}$ :

$$f^{(1)} = f_i\mathbf{d}x^i \implies f_i g^{ik}\underline{e}_k = \underline{f} \quad (\text{J.88})$$

Lahko se je prepričati, da so komponente 1-forme  $f_i$  v kartezični koordinatni bazi kar komponente ustreznega vektorskega polja. Tako uvidimo, da predstavlja izraz  $f^{(1)}[C]$  to, kar smo v klasični matematični fiziki navajeni označiti z  $\vec{f} \cdot d\vec{s}$ , to je

projekcijo vektorskega polja na infinitezimalni odsek krivulje  $C$ . Ta projekcija je v vsaki točki skalar, ki je odvisen samo od dolžine poti ( $ds$ ), od velikosti vektorja  $\underline{f}$  in od kota med tangento na pot in vektorjem  $\underline{f}$ . Ta skalar ne sme in ne more biti odvisen od koordinatnega sistema v katerem ga izračunamo. Prav to je razlog, da definiramo 1-forme na tak način; imajo vedno enak geometrijski pomen, ne glede na to v kateri koordinatni bazi so zapisane. Bralec si gotovo lahko predstavlja, da so komponente 1-form odvisne od koordinatnega sistema, saj se koordinatne 1-forme različnih koordinatnih sistemov med seboj razlikujejo. Samo kombinacija komponent in koordinatnih 1-form je neodvisna od koordinatnega sistema.

**Naloga J.9:** V evklidskem 3-razsežnem prostoru s koordinatami  $x, y$  in  $z$  vpeljemo še sferne koordinate  $r, \theta, \varphi$ . Pokaži, da se 1-forma  $\mathbf{dr}$  izraža v kartezični koordinatni bazi takole:

$$\mathbf{dr} = \frac{x}{r}\mathbf{dx} + \frac{y}{r}\mathbf{dy} + \frac{z}{r}\mathbf{dz} \quad (\text{J.89})$$

Izrazi nekaj krivulj v obeh koordinatnih sistemih (v kartezičnem in v sfernem) in se prepričaj, da je vrednost izraza  $\mathbf{dr}[C]/ds$  neodvisna od tega, v katerih koordinatah ga izračunamo, če je le  $ds$  dolžina poti vzdolž krivulje v obeh primerih. Nekateri računi in razmisleki petega poglavja so lahko pri tem v pomoč.

Pokazali smo, da pojem razdalje na mnogoterosti omogoča tesno zvezo med vektorskimi polji in 1-formami. Vendar je mogoče govoriti tako o vektorskih poljih kot o 1-formah tudi če pojem razdalje ni definiran. Vektor v točki si predstavljamo kot tangento na krivuljo, ki gre skozi to točko. Včasih je ugodno, če si predstavljamo vektorje kot operatorje, ki delujejo na krivulje - podobno kot 1-forme. Ker tvorijo vsi vektorji v vsaki točki mnogoterosti vektorski prostor, je dovolj, če povemo, kako delujejo na krivulje bazni vektorji. Bazni vektor  $\underline{e}_k$  je tangenta na krivuljo  $C_k$  J.75. Smiselno je definirati delovanje operatorja  $\underline{e}_k$  tako, da je:

$$\underline{e}_k C_l = \delta_{kl} \quad (\text{J.90})$$

Tako delovanje dosežemo, če reprezentiramo operator  $\underline{e}_k$  s  $\frac{\partial}{\partial x^k}$ :

$$\underline{e}_k \hat{=} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{J.91})$$

Najpomembnejše pri tem zapisu je poudarek na koordinatno invariantni reprezentaciji vektorjev. To pomeni tole: Če je vektor  $\underline{v}$  v kartezičnih koordinatah zapisan v obliki:

$$\underline{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad (\text{J.92})$$

potem se v koordinatni bazi  $\eta^i(x^k)$  ( $\eta^i(x^1, \dots, x^n)$  so zvezno odvedljive funkcije kartezičnih koordinat) zapiše v obliki:

$$\underline{v} = v^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \eta^k} \equiv \hat{v}^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} \quad , \quad (\text{J.93})$$

Pri čemer je seveda:

$$\hat{v}^k = v^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} \quad (\text{J.94})$$

### 10.3.2 2-forme

1-forme so operatorji, s katerimi projiciramo vektorje na krivulje, to je na enodimenzionalne elemente simplektične strukture. 2-forme pa so operatorji, s katerimi projiciramo (nekaj?) na dvodimenzionalne elemente simplektične strukture, to je na (2-)površine. Tako kot 1-formam lahko tudi 2-formam priredimo koordinatno bazo. Sestavljajo jo klinasti produkti med baznimi 1-formami.

Oglejmo si najprej delovanje 2-form v 3-razsežnem prostoru (mislimo pravzaprav na trirazsežno mnogoterost), ki nam je najbolj domač. Tu so bazne 1-forme  $\mathbf{d}x, \mathbf{d}y$  in  $\mathbf{d}z$ , bazne 2-forme pa morajo biti potentakem  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ ,  $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$  in  $\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x$ . Vsi ostali možni klinasti produkti so zaradi antisimetrije klinastega produkta bodisi negativni gornji (Tako je npr.  $\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}y = -\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ ), ali pa so identično enaki 0 (kot npr.  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}x$ ). Delovanje baznih 2-form na površine naj bo čim bolj podobno delovanju baznih 1-form na krivulje. Spomnimo se, da je  $\mathbf{d}x[C]$  infinitezimalni skalar, ki da prirastek koordinate  $x$  na infinitezimalno kratkem odseku krivulje  $C$ . Z drugimi besedami,  $\mathbf{d}x[C]$  je projekcija infinitezimalnega odseka krivulje  $C$  na vektorsko polje, ki ustreza 1-formi  $\mathbf{d}x$ . Po analogiji zahtevamo, naj bo  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A]$  projekcija infinitezimalnega dela površine  $A$  na ravnino  $x - y$ .

V prejšnjem poglavju smo povedali, da lahko v kartezičnih (pa tudi v drugih nesingularnih koordinatah) izrazimo 2-razsežno površino, recimo ji  $A$ , z  $n$  funkcijami ( $n$  je dimenzija prostora, v našem primeru je  $n = 3$ ) dveh spremenljivk  $u$  in  $v$  kot npr. v obliki:  $x = \xi(u, v)$ ,  $y = \eta(u, v)$ ,  $z = \zeta(u, v)$ . Za konstanten  $v = v_0$  je  $x = \xi(u, v_0)$ ,  $y = \eta(u, v_0)$ ,  $z = \zeta(u, v_0)$  enačba krivulje - recimo ji  $C_u$ . Tudi  $x = \xi(u_0, v)$ ,  $y = \eta(u_0, v)$ ,  $z = \zeta(u_0, v)$  predstavlja za konstanten  $u_0$  krivuljo, ki jo imenujmo  $C_v$ . Obe krivulji  $C_u$  in  $C_v$  gotovo ležita v ploskvi  $A$  in nista vzporedni v točki s koordinatama  $u_0, v_0$  kjer se sekata (Zato, ker se koordinate po dogovoru nesingularne in ima mnogoterost v okolici vsake točke prav tako simplektično strukturo kot evklidski prostor.). Tako lahko v okolici točke  $\wp$  s koordinatama  $u = u_0$ ,  $v = v_0$ , konstruiramo infinitezimalni trikotnik. Prva stranica tega trikotnika naj bo infinitezimalni odsek krivulje  $C_u$ , druga infinitezimalni odsek krivulje  $C_v$ , tretja



pa seveda povezuje prosti krajišči prve in druge. Če tečeta krivulji slučajno vzdolž smeri  $x$  in  $y$  vemo, da leži površina v ravnini  $x - y$ , njena velikost pa je površina pravokotnega infinitezimalnega trikotnika  $\frac{1}{2}dxdy$ . Za tako površino zato zahtevamo:

$$\frac{1}{2}\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A] = \frac{1}{2}\mathbf{d}x[C_u]\mathbf{d}y[C_v] = \frac{1}{2}dxdy \quad (\text{J.95})$$

Če bi slučajno izbrali za prvo stranico krivuljo, ki teče v smer osi  $y$  in za drugo tisto, ki teče v smer osi  $x$ , bi uporabili antisimetričnost klinastega produkta in zapisali:

$$\frac{1}{2}\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A] = -\frac{1}{2}\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}x[A] = -\frac{1}{2}\mathbf{d}y[C_u]\mathbf{d}x[C_v] = -\frac{1}{2}dxdy \quad (\text{J.96})$$

Poskušajmo definicijo smiselno razširiti na infinitezimalne trikotnike, ki jih omejujeta poljubni krivulji  $C_u$  in  $C_v$ ! Zaradi asociativnosti, distributivnosti in antisimetričnosti klinastega produkta mora veljati:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A] = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(\alpha\mathbf{d}x + \beta\mathbf{d}y) \wedge (\gamma\mathbf{d}x + \delta\mathbf{d}y)[A] \quad , \quad (\text{J.97})$$

pri čemer so  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in  $\delta$  poljubne konstante, ki ubogajo neenakost  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . V na novo vpeljanih 1-formah

$$u^{(1)} = \alpha\mathbf{d}x + \beta\mathbf{d}y \quad \text{in} \quad v^{(1)} = \gamma\mathbf{d}x + \delta\mathbf{d}y \quad (\text{J.98})$$

izberemo konstante  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in  $\delta$  tako, da je

$$v^{(1)}[C_u] = 0 \quad \text{in} \quad u^{(1)}[C_v] = 0. \quad (\text{J.99})$$

Zato postavimo (v točki  $\varphi$ ):

$$\alpha = \frac{\partial\eta}{\partial v} \quad , \quad \beta = -\frac{\partial\xi}{\partial v} \quad , \quad \gamma = \frac{\partial\eta}{\partial u} \quad \text{in} \quad \delta = -\frac{\partial\xi}{\partial u} \quad (\text{J.100})$$

Po J.97 smemo dvakratno projekcijo ploščine trikotnika, to je projekcijo ustreznega paralelograma, zapisati takole:

$$dS_z = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A] \equiv \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}u^{(1)} \wedge v^{(1)}[A] \quad (\text{J.101})$$

in končno:

$$dS_z = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}u^{(1)}[C_u]v^{(1)}[C_v] \quad (\text{J.102})$$

$$= \frac{1}{-\frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u}} \left( \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) du \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) dv \quad (\text{J.103})$$

$$= \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) dudv \quad (\text{J.104})$$

Izraz pred produktom  $dudv$  prepoznamo kot Jacobijevo determinanto med kartezičnimi in krivočrtnimi koordinatami (glej npr. Vidav). Torej smo z enačbama J.99 in J.102 dobili običajna izraza za infinitezimalne elemente ploščine v krivočrtnih koordinatah vsaj takrat, kadar leži element ploščine omejen s krivuljama  $C_u$  in  $C_v$  v ravnini  $x - y$ . Če pa  $A$  ne leži v ravnini  $x - y$ , je po naši izkušnji  $\frac{1}{2} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A]$  projekcija elementa ploščine na ravnino  $x - y$ . Kvadrat ploščine poljubno orientirane infinitezimalne ploskvice zapišemo v trirazsežnem prostoru po naših izkušnjah takole:

$$dS^2 = (\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y[A])^2 + (\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z[A])^2 + (\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x[A])^2, \quad (\text{J.105})$$

ali v bolj kompaktni pisavi:

$$dS^2 = \frac{1}{4} \delta^{ik} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{kpq} (\mathbf{d}x^l \wedge \mathbf{d}x^m) \otimes (\mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q)[A][A] \quad (\text{J.106})$$

Pri tem sta  $\delta^{ik}$  in  $\varepsilon_{ijk}$  že definirana Kronekerjev simbol in popolnoma antisimetrični simbol v trirazsežnem prostoru. Po prejšnjem dogovoru je implicitno privzeto seštevanje po ponavljajočih se indeksih od 1 do 3,  $\otimes$  pa označuje direktni produkt dveh baznih 2-form, ki je definiran tako kot smo že napovedali:

$$(\mathbf{d}x^l \wedge \mathbf{d}x^m) \otimes (\mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q)[A][B] = (\mathbf{d}x^l \wedge \mathbf{d}x^m)[A](\mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q)[B] \quad (\text{J.107})$$

**Naloga J.10:** Preveri, da velja J.97, če  $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$ .

**Naloga J.11:** Preveri, da velja J.99, če so konstante  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in  $\delta$  podane z J.100.

**Naloga J.12:** Prepričaj se, da je izraz J.106 res ekvivalenten J.105. Ali lahko ugaaneš kako bi zapisali ploščino dvorazsežne ploskve v  $n$  razsežnem prostoru v kartezični koordinatni bazi? (Antisimetrični simbol v  $n$ -razsežnem prostoru ima  $n$  različnih indeksov ( $\varepsilon_{ij\dots z}$ )).

Morda je bralec pravilno uganil kako posplošiti enačbo J.106, da bo veljala tudi v  $n$ -razsežnem prostoru ali pa tudi ne. Če se hočemo problema sistematično lotiti, se najprej vprašamo zakaj se ploščina infinitezimalne ploskvice v tri-razsežnem prostoru zapiše ravno v obliki J.105? Odgovor morda tiči v dejstvu, da moramo dobiti za površino izbrane ploskve vedno enak rezultat ne glede na to v katerih koordinatnih sistemih jo izračunamo. Poglejmo si, kako se spremeni izraz za površino če jo računamo v kartezičnih koordinatnih sistemih, ki so med seboj zasukani. Ustrezno preimenovanje koordinatnih 0-form in prav tako koordinatnih 1-form dosežemo z rotacijsko matriko tako kot v drugem poglavju prvega dela, to je z linearno transformacijo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}x \\ \mathbf{d}y \\ \mathbf{d}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}x' \\ \mathbf{d}y' \\ \mathbf{d}z' \end{pmatrix} \quad (\text{J.108})$$

Pri čemer ni odveč spomniti na pomembno lastnost, da je produkt rotacijske matrike z njeno transponirano matriko enotna matrika. V komponentni pisavi je to zapišemo v obliki:

$$R^i_k \delta_{ij} R^j_l = \delta_{kl} \quad (\text{J.109})$$

Pokazali smo, da je J.106 gotovo pravi izraz za kvadrat ploščine infinitezimalnega paralelograma, če ta leži v eni od koordinatnih ravnin. J.106 je zato splošno veljaven, če se enako zapiše v vseh kartezičnih koordinatnih sistemih. Da bi to pokazali, se najprej prepričamo, da velja (prepričaj se sam!):

$$\delta^{ik} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{kpq} = \delta_{lp} \delta_{mq} - \delta_{lq} \delta_{mp} \quad (\text{J.110})$$

Vstavimo J.108 v J.106, upoštevamo gornjo identiteto in zapišemo J.106 v zavrtenem koordinatnem sistemu:

$$dS^2 = \frac{1}{4} (\delta_{lp} \delta_{mq} - \delta_{lq} \delta_{mp}) R^l_h R^m_i R^p_j R^q_k (\mathbf{d}\mathbf{x}^h \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^i) \otimes (\mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k) [A][A] \quad (\text{J.111})$$

Ko upoštevamo J.109, se prepričamo, da se vse rotacijske matrike zmnožijo v enotske matrike ( $\delta_{ij}$ ). Tako ostane:

$$dS^2 = \frac{1}{4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) (\mathbf{d}\mathbf{x}^\lambda \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^\mu) \otimes (\mathbf{d}x^\tau \wedge \mathbf{d}x^\kappa) [A][A] \quad , \quad (\text{J.112})$$

kar je po J.110 natanko J.106.

Na podoben način pridemo do izraza za kvadrat infinitezimalne ploščine v  $n$ -razsežnem prostoru. Če leži ploskev  $A$  slučajno v ravnini  $x^i - x^j$ , izračunamo površino infinitezimalnega paralelograma natanko tako kot prej (enačbe J.95-J.102).

Računanja ploščine poljubno orientiranega paralelograma pa se lotimo tako, da se zavrtimo v koordinatni sistem glede na katerega leži paralelogram v "ravnini" dveh koordinat, nato pa izrazimo ploščino po J.102 s starimi (nezavrtjenimi) koordinatmi. Na ta način pridemo do naslednjega izraza za kvadrat infinitezimalne ploščine:

$$dS^2 = \frac{1}{4(n-2)!} \varepsilon_{ab\dots efg} \varepsilon_{ij\dots lmn} \delta^{ai} \delta^{bj} \dots \delta^{el} (\mathbf{d}x^f \wedge \mathbf{d}x^g) \otimes (\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^n) [A][A] \quad (\text{J.113})$$

Zgoraj ima vsak antisimetrični simbol ( $\varepsilon$ )  $n$  različnih indeksov, Kronekerjevih  $\delta$  pa je  $n-2$ .

**Naloga J.13:** Prepričaj se, da dobiš J.95, če je ploskev  $A$  ravnina  $x^1 = u$ ,  $x^2 = v$ ,  $x^3 = X_0^3 \dots x^n = X_0^n$ ! (Opazil boš, da šteje faktor  $4(n-2)!$  v imenovalcu število ponovitev dve forme  $\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 = -\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^1$ .)

**Naloga J.14:** Pokaži, da se tudi v zavrtjenih koordinatah

$$\mathbf{d}x^{i'} = R^i_k \mathbf{d}x^k \quad (\text{J.114})$$

element kvadrata ploščine izraža z J.113, samo če zamenjamo originalne koordinate s črtkanimi.

Zapišimo še kvadrat ploščinskega elementa v krivočrtnih koordinatah (v katerih se razdalje med točkami zapišejo kot v J.75:

$$dS^2 = \frac{1}{4(n-2)!} g^{1/2} \varepsilon_{ab\dots efg} g^{1/2} \varepsilon_{ij\dots lmn} g^{ai} g^{bj} \dots g^{el} (\mathbf{d}x^f \wedge \mathbf{d}x^g) \otimes (\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^n) [A][A] \quad (\text{J.115})$$

Pri tem je  $g$  standardna oznaka za determinanto metričnega tenzorja. Pravilnost tega izraza lahko pokažemo, če se iz kartezičnih koordinat preselimo v krivočrtno. Dokazovanje je premočrtno vendar zamudno, zato ga tu ne bomo reproducirali.

Vektorski prostor 1-form je prostor linearnih kombinacij ( $n$ ) baznih 1-form. Podobno je prostor 2-form prostor linearnih kombinacij baznih 2-form. Splošni element v tem prostoru lahko torej zapišemo v obliki:

$$f^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \quad (\text{J.116})$$

Pomembne so samo antisimetrične komponente matrike  $f_{ij}$ , saj tisti del  $f_{ij}$ , ki ni antisimetričen, zaradi antisimetrije baznih 2-form glede na zamenjavo obeh indeksov,

nima nobenega učinka; namreč  $\alpha(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j + \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i) \equiv 0$ . Faktor  $\frac{1}{2}$  stoji pred definicijo iz estetskih razlogov. Spominja, da nastopa v vsoti, ki teče od 1 do  $n$  ( $n$  je dimezionalnost prostora, za nas je to trenutno 3) vsak par (različnih) indeksov dvakrat npr. kot  $f_{23}\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3$  in kot  $f_{32}\mathbf{d}x^3 \wedge \mathbf{d}x^2 = -f_{32}\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = f_{23}\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3$  (V prvem koraku smo upoštevali antisimetrijo klinastega produkta, v drugem pa antisimetričnost matrike komponent.). Splošna 2-forma se v 3-razsežnem prostoru zapiše v kartezični koordinatni bazi v obliki:

$$f^{(2)} = f_{12}\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + f_{23}\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + f_{31}\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x \quad (\text{J.117})$$

Rezultat delovanja splošne 2-forme na ploskev pa je:

$$f^{(2)}[A] = f_{12}dS_{xy} + f_{23}dS_{yz} + f_{31}dS_{zx} \equiv f_{12}dS_z + f_{23}dS_x + f_{31}dS_y \quad (\text{J.118})$$

Pri tem sem označil z  $dS_{xy} = dx dy$  projekcijo elementa ploskve  $A$  na ravnino  $x - y$  in podobno za  $dS_{yz}$  in  $dS_{zx}$ . V naslednjem koraku pa sem opozoril, da npr. pri površinskih integralih te projekcije pogosto označujemo kot projekcije vektorja, ki mu rečemo površinski element  $d\vec{S}$ . Izraz J.118 lahko razumemo kot skalarni produkt  $\vec{f} \cdot d\vec{S}$ , če so kartezične komponente vektorja  $\vec{f}$  naslednje  $(\vec{f})_1 = f_{23}$ ,  $(\vec{f})_2 = f_{31}$  in  $(\vec{f})_3 = f_{12}$ . Na ta način lahko v treh dimenzijah priredimo tudi 2-formam vektorska polja po predpisu (Brez dokaza povejmo, da velja spodnji izraz tudi v krivočrtnih koordinatah in tudi v trirazsežnih mnogoterostih.):

$$\vec{f} \hat{=} g^{-1/2} \varepsilon^{ijk} f_{ij} \underline{e}_k \quad (\text{J.119})$$

Ali pa 1-forme po predpisu:

$$F^{(1)} \equiv f^{(2)*} = \frac{1}{2} g^{-1/2} g_{lk} \varepsilon^{ijk} f_{ij} \mathbf{d}x^l \quad (\text{J.120})$$

Gornja ugotovitev velja samo v treh dimenzijah, kajti samo v treh dimenzijah je število linearno neodvisnih baznih 1-form enako številu linearno neodvisnih baznih 2-form, to je tri. V dveh dimenzijah je baza 1-form dvo-razsežna (bazni 1-formi  $\mathbf{d}x$  in  $\mathbf{d}y$ ), baza 2-form pa eno-razsežna (bazna 2-forma je samo  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ ). Zato smemo prirediti v dveh dimenzijah 2-formam skalarje. Nasprotno pa je v štirih dimenzijah prostor baznih 2-form šestrazsežen in je tako "večji" od prostora 1-form. V 4-razsežni mnogoterosti namreč obstajajo v vsaki okolici štiri linearno neodvisne 1-forme ( $\mathbf{d}x^0$ ,  $\mathbf{d}x^1$ ,  $\mathbf{d}x^2$ ,  $\mathbf{d}x^3$ ) pa šest linearno neodvisnih 2-form ( $\mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1$ ,  $\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^0$ ,  $\mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^3$ ,  $\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^1$ ,  $\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^3$ ,  $\mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3$ ). Zaradi lastnosti 3-razsežnega prostora, da je število linearno neodvisnih 1-form enako številu linearno neodvisnih 2-form, je mogoče v trirazsežnem prostoru definirati vektorski produkt in vektorsko operacijo rotor.

### 10.3.3 O 3-formah

V 3-razsežnih mnogoterostih je mogoče definirati samo še 3-forme. V tej razsežnosti obstaja ena sama bazna 3-forma; v kartezičnih koordinatah je to  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ . Če opišemo poljubno 3-razsežno mnogoterost ( $M$ ) s tremi funkcijami treh parametrov (novih koordinat) ( $x = \xi(u, v, w)$ ,  $y = \eta(u, v, w)$ ,  $z = \zeta(u, v, w)$ ) v  $n$ -razsežnem prostoru, je rezultat delovanja bazne 3- forme na  $M$  podobno kot v J.102:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = \quad (\text{J.121})$$

$$= \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \mathbf{d}u + \frac{\partial \xi}{\partial v} \mathbf{d}v + \frac{\partial \xi}{\partial w} \mathbf{d}w \right) \wedge \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} \mathbf{d}u + \frac{\partial \eta}{\partial v} \mathbf{d}v + \frac{\partial \eta}{\partial w} \mathbf{d}w \right) \wedge \left( \frac{\partial \zeta}{\partial u} \mathbf{d}u + \frac{\partial \zeta}{\partial v} \mathbf{d}v + \frac{\partial \zeta}{\partial w} \mathbf{d}w \right) \quad (\text{J.122})$$

$$= \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial w} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial w} \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial w} \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial w} + \frac{\partial \xi}{\partial w} \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial w} \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}w \quad (\text{J.123})$$

Tale izraz smo "izpeljali" drugače kot J.102. Kartezične bazne 1- forme smo izrazili s krivočrtnimi baznimi 1-formami, nato pa smo upoštevali pravilo za klinasto množenje med formami. Po tej poti pridemo takoj do željenega rezultata. Seveda pa je fundamentalna pot tista, ki upoševa razvidne lastnosti simplektičnih struktur, to je verjetno pot, po kateri smo prišli do J.102. Ves aparat, ki smo ga tu vpeljali ima smisel samo zato, ker se algebra prilega geometrijski aksiomatiki. Preostali izraz v okroglem oklepaju v J.123 prepoznamo kot Jacobijevo determinanto, kar nas prepriča, da smo dobili pravilen izraz za prostorninski element (Glej npr. I. Vidav: Višja matematika.). (Potreben pogoj za to, da so koordinate  $u$ ,  $v$ ,  $w$  v okolici točke  $\varphi$  nesingularne je, da eksistira v okolici  $\varphi$  od nič različna prostornina, to je, da je Jacobijeva determinanta v okolici te točke nesingularna. V  $n$ -razsežni mnogoterosti velja analogen sklep za  $n$ -forme. Jacobijeva determinanta je tam determinanata matrike ranga  $n$ .)

## 10.4 Operacija zvezda

Operacija J.120, s katero priredimo v 3-razsežni mnogoterosti 2-formam 1-forme, je preslikava med prostoroma 1-form in 2-form, ki imata na 3-razsežnih mnogoterostih slučajno enako dimenzijo. Zato ima vsaka 1-forma svojo enolično sliko v prostoru 2-form in obratno vsaka 2-forma svojo enolično sliko v prostoru 1-form. Taki preslikavi pravijo matematiki difeomorfizem (Matematiki bi jo bolj natančno opredelili, za nas pa naj zadostuje ta nekoliko ohlapen opis.). V  $n$ -razsežnih mnogoterostih definiramo podobne difeomorne preslikave med formami, ki operirajo v prostorih z enakimi dimenzijami. Na  $n$  razsežni mnogoterosti je dimenzija prostora  $r$ -form ( $r \leq n$ ) enaka

dimenziji  $(n-r)$ -form (Prepričaj se sam!). Zato je na  $n$ -razsežni mnogoterosti mogoče konstruirati difeomorfno preslikavo med  $r$  in  $(n-r)$ -formami, ki so ji dali ime zvezda (\*):

$$f^{(r)} \implies F^{(n-r)} \quad (\text{J.124})$$

ali

$$f^{(r)*} = F^{(n-r)} \quad (\text{J.125})$$

je slika  $r$ -forme  $f^{(r)}$ , ki jo naredi operacija zvezda. Operacija zvezda preslika  $r$ -formo  $f^{(r)} (= \frac{1}{r!} \sum f_{ij\dots l} \underbrace{\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^l}_{r \text{ faktorjev}})$  v  $n-r$  formo s komponentami:

$$F_{ab\dots d} = \frac{1}{(n-r)!} g^{-1/2} g_{ai} g_{bj} \dots g_{dm} \varepsilon^{ij\dots mn\dots pq} f_{n\dots pq} \quad (\text{J.126})$$

**Naloga J.15:** Pokaži, da velja:

$$\varepsilon^{ijk\dots pq} g_{a_1 i} g_{a_2 j} g_{a_3 k} \dots g_{a_{(n-1)} p} g_{a_n q} = g \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (\text{J.127})$$

**Naloga J.16:** Pokaži, da je pri operaciji zvezda slika slike enaka originalu! (Rezultat prejšnje naloge je lahko v veliko pomoč.)

### Klinasti produkt med formami

V  $n$  razsežnem prostoru je ugodno definirati klinasti produkt med  $p$  in  $r$  formami ( $p+r \leq n$ ) tako, da zanj veljajo vsa pravila klinastega množenja (J.57 in J.58). Uporabnost klinastega produkta med formami bomo spoznali na primerih.

**Naloga J.17:** Naj bosta  $f^{(p)}$  in  $f^{(q)}$   $p$ -forma in  $q$ -forma, ki se v komponentah (lahko tudi krivočrtnih) izražata kot  $f^{(p)} = f_{ij\dots l} \underbrace{\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^l}_{p \text{ faktorjev}}$  in  $g^{(q)} =$

$g_{ij\dots s} \underbrace{\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^s}_{q \text{ faktorjev}}$ . Zapiši komponente produktne forme ( $h^{(p+q)} = f^{(p)} \wedge g^{(q)}$ ).

**Naloga J.18:** Naj bosta  $f^{(1)}$  in  $g^{(1)}$  1- formi, ki jima v trirazsežnem prostoru pripišemo vektorski polji  $\underline{f}$  in  $\underline{g}$ . Pokaži, da je vektorsko polje  $\underline{k}$ , ki ga po J.119 priredimo produktu  $k^{(2)} = f^{(1)} \wedge g^{(1)}$ , vektorski produkt polj  $\underline{f}$  in  $\underline{g}$  ( $\vec{k} = \vec{f} \times \vec{g}$ ).

Če sta  $f$  in  $h$   $r$ -formi, velja

$$P^{(n)} = f^{(r)} \wedge h^{(r)*} = f^{(r)} \wedge H^{(n-r)} = f^{(r)*} \wedge h^{(r)} = F^{(n-r)} \wedge h^{(r)} \quad . \quad (\text{J.128})$$

$P^{(n)}$  je  $n$ -forma, ki jo zvezda preslika v 0-formo  $p^{(0)}$ . Tako je  $p^{(0)}$  produkt  $r$ -form  $f$  in  $h$ . Če sta  $f$  in  $h$  1-formi, je njun produkt  $p^{(0)}$  natanko skalarni produkt ustreznih vektorjev. Ta lastnost potrjuje smiselnost in koordinatno neodvisnost operacije zvezda.

**Naloga J.19:** Pokaži, da se produkt  $r$ -form zapiše v komponentah takole:

$$(f^{(r)} \wedge h^{(r)*})^* = f_{ab\dots d} h_{ij\dots l} g^{ai} g^{bj} \dots g^{dl} \quad (\text{J.129})$$

## 10.5 Odvajanje

### Zunanji odvod

Diferencial fukcije  $n$  spremenljivk npr.  $f(x^1, x^2 \dots x^n)$  smo vajeni zapisati v obliki:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \quad (\text{J.130})$$

Pri tem si radi predstavljamo diferencialne  $dx^i$  kot neke konkretne (infinitesimalne) številke, ki povedo za koliko narastejo koordinate, ko se od točke  $\wp$  premaknemo v bližnjo točko vzdolž neke krivulje. V jeziku form moramo zapisati namesto  $dx^i$   $\mathbf{d}x^i[C]$ , funkcije, ki zavzamejo številsko vrednost v vsaki točki pa imenujemo 0-forme. Če je torej  $f^{(0)}$  0-forma, je ugodno definirati njen *zunanji odvod* kot 1-formo, ki se v izbrani koordinatni bazi izraža v obliki:

$$\mathbf{d}f^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \mathbf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} \mathbf{d}x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \mathbf{d}x^n \quad (\text{J.131})$$

Tako je tisto, kar smo nekoč zapisali kot  $df$ , korektnije označiti z  $\mathbf{d}f^{(0)}[C]$ . Lahko se je prepričati, da je vektor, ki po ?? ustreza 1-formi  $\mathbf{d}f^{(0)}$ , gradient funkcije  $f^{(0)}$  (Prepričaj se!). Taka definicija zunanjega odvoda 0-forme je neodvisna od koordinat. To pomeni, da je vrednost operatorja  $\mathbf{d}f^{(0)}$ , položenega na poljubno krivuljo  $C$ , neodvisna od tega, v katerih koordinatah izrazimo operator zunanji odvod, če le meri  $ds$  vedno dolžino poti vzdolž krivulje. Naj bodo  $x^i$  kartezične koordinate,  $\xi^i$  pa krivočrtne koordinate v  $n$ -razsežnem ravnem prostoru. Če so koordinate v neki okolici nesingularne, eksistira povratno enolična zveza med  $x^i$  in  $\xi^i$  v tej okolici. Vzemimo, da to zvezo poznamo ( $x^i = \bar{x}^i(\xi^k)$  in  $\xi^i = \bar{\xi}^i(x^k)$ ). Po izreku o implicitnih funkcijah velja:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l \quad (\text{J.132})$$



Zapišimo vrednost  $\mathbf{d}f^{(0)}[C]$  v kartezičnih koordinatah:

$$\mathbf{d}f^{(0)}[C] = \frac{\partial f}{\partial x^1} \mathbf{d}x^1[C] + \frac{\partial f}{\partial x^2} \mathbf{d}x^2[C] + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \mathbf{d}x^n[C] \quad (\text{J.133})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} dt + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \frac{dx^n}{dt} dt \quad (\text{J.134})$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt \quad (\text{J.135})$$

V krivočrtnih koordinatah pa zapišemo ta izraz v obliki:

$$\mathbf{d}f^{(0)}[C] = \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \mathbf{d}\xi^1[C] + \frac{\partial f}{\partial \xi^2} \mathbf{d}\xi^2[C] + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \xi^n} \mathbf{d}\xi^n[C] \quad (\text{J.136})$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{dt} dt \quad (\text{J.137})$$

Upoštevamo, da je  $\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dt}$  in še  $\frac{\partial f}{\partial \xi^i} = \frac{\partial f}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i}$  (Seštevanje po ponavljajočih se indeksih  $m$  in  $p$  je implicitno.), pa lahko J.137 zapišemo v obliki:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{dt} dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dt} dt \quad (\text{J.138})$$

Ko upoštevamo še J.132 uvidimo, da je vrednost izrazov J.135 in J.137 identična za enak  $dt$ . To je pomen izjave, da je zapis 1-form neodvisen od koordinat. V jeziku petega poglavja lahko rečemo, da so 1-forme invariantne glede na umeritvene transformacije E.31. Ravno ta invariantnost daje formam njihov poseben pomen v splošni teoriji relativnosti in seveda v vseh teorijah polja, ki morajo upoštevati lastnosti prostora.

Kot smo definirali zunanji odvod 0-form, je mogoče definirati tudi zunanji odvod 1-form, 2-form itd. Zunanji odvod 1-forme ( $f^{(1)} = f_i \mathbf{d}x^i$ ) je tako:

$$\mathbf{d}f^{(1)} = f_{i,j} \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i \quad (\text{J.139})$$

Zunanji odvod 2-forme je analogno:

$$\mathbf{d}f^{(2)} = f_{ij,k} \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \quad (\text{J.140})$$

in tako naprej do poljubnega reda forme, ki lahko eksistira v prostoru z dano razsežnostjo. Zunanji odvod  $p$ -forme je v splošnem  $(p+1)$ -forma. Tudi  $p$ -forme so v enakem smislu

kot 1-forme invariantni operatorji, ker dajo, ko delujejo na  $p$ -mnogoterostih od koordinat neodvisne vrednosti.

**Naloga J.20:** Naj bosta  $f^{(p)}$  in  $g^{(r)}$   $p$  in  $q$  forma ( $p + q < n$ ). Pokaži, da je zunanji odvod njunega klinastega produkta:

$$\mathbf{d}(f^{(p)} \wedge g^{(r)}) = \mathbf{d}f^{(p)} \wedge g^{(r)} + (-1)^p f^{(p)} \wedge \mathbf{d}g^{(r)} \quad (\text{J.141})$$

**Naloga J.21:** Pokaži, da je v  $n$  mnogoterosti zunanji odvod  $n$  forme identično enak 0.

**Naloga J.22:** Pokaži, da je rezultat dvakratnega zunanjega odvajanja identično enak 0:

$$\mathbf{d}\mathbf{d}f^{(r)} \equiv 0 \quad (\text{J.142})$$

**Naloga J.23:** Naj bo  $f^{(1)}$  1-forma, ki v 3 razsežni mnogoterosti ustreza vektorskemu polju  $\underline{f}$ . Izračunaj zunanji odvod njene slike  $f^{(1)*}$ . Pokaži, da je to divergenca polja  $\underline{f}$  pomnožena s prostorninskim elementom:

$$\mathbf{d}(f^{(1)*}) \equiv \text{div} \underline{f} dV \quad (\text{J.143})$$

( $dV = g^{1/2} du dv dw$ ), oziroma:

$$(\mathbf{d}(f^{(1)*}))^* \equiv \text{div} \underline{f} \quad (\text{J.144})$$

**Naloga J.24:** Če je  $f^{(0)}$  0-forma, se Laplacov operator (v skladu z rezultatom prejšnje naloge) izraža takole:

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}f^{(0)})^* \equiv \Delta f^{(0)} \quad (\text{J.145})$$

Zapiši Laplacov operator v krogelnih koordinatnih formah (glej E.1 - E.3).

**Naloga J.25:** Naj bodo  $x^i$  ( $i = 1 \dots n$ ) koordinatne 0-forme v ( $n$ ) mnogoterosti.

Pokaži, da lahko zapišemo posplošeni Laplacov operator na 0-formi  $f^{(0)}$  v tej mnogoterosti kot:

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}f^{(0)})^* = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^j}) \quad (\text{J.146})$$

**Naloga J.26:** Zapiši posplošeni Laplaceov operator na 2-mnogoterosti, ki je površina krogle.

## 10.6 Posplošeni Gaussov izrek

V teoretični fiziki izražamo vse vrste ohranitev (npr ohranitev mase, ohranitev naboja, energije...) z Gaussovim izrekom. Izrek pravi, da je integral vektorskega polja po zaključeni površini enak integralu divergence tega polja po prostornini, ki jo površina objame. V klasični pisavi zapišemo:

$$\oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV \quad (\text{J.147})$$

Naj bo  $f^{(2)}$  2-forma, ki jo operator zvezda preslika v  $F^{(1)}$ , tej sliki pa pripada vektorsko polje  $\underline{f}$ . V nalogi 10.5 smo se prepričali, da lahko zapišemo divergenco vektorskega polja  $\underline{f}$  pomnoženo z volumskim elementom  $dV$  kot zunanji odvod slike  $F^{(1)}$ , ki deluje na mnogoterost  $V$ , to je:  $\text{div} \underline{f} dV = \mathbf{d}F^{(1)*}[V] = \mathbf{d}f^{(2)}[V]$ . V odstavku J.60 pa smo videli, da ustreza izrazu  $f^{(2)}[A]$  v klasični matematični analizi izraz  $\vec{f} \cdot d\vec{S}$ . V jeziku form zapišemo zato Gaussov izrek za 3-razsežno mnogoterost v obliki:

$$\int_{\partial V} f^{(2)} = \int_V \mathbf{d}f^{(2)} \quad (\text{J.148})$$

Z  $V$  smo označili trirazsežno mnogoterost po kateri integriramo, s  $\partial V$  pa dvo-razsežno mnogoterost, ki omejuje  $V$ . Mnogoterosti po katerih seštevamo infinitezimalne prispevke (integriramo) stojijo v naši notaciji samo v mejah, s čimer želimo poudariti, da velja J.148 za vsak  $V$ . Če pa je  $W$   $n$ -razsežna mnogoterost in  $\partial W$  njena meja, uganemo, da velja za vsako  $n - 1$  formo:

$$\int_{\partial W} f^{(n-1)} = \int_W \mathbf{d}f^{(n-1)} \quad (\text{J.149})$$

Za integracijo po  $n$ -razsežnem paralelepipedu dokažemo to trditev s parcialnim integriranjem tako kot v klasični analizi, posplošitev na mnogoterosti pa sledi po invariančnosti  $p$ -form glede na koordinatne transformacije.

## 10.7 Transformacijske grupe, Lie-jev odvod, kovariantni odvod itd.

Do sedaj smo obravnavali infinitezimalne geometrijske strukture, ki jih konstruiramo v okolici točk na mnogoterosti. Pogosto se pojavlja potreba po primerjavi struktur, ki so definirane v različnih točkah mnogoterosti. Tak primer je npr. pospešek, ki je po fizikalni definiciji razlika med hitrostma telesa v dveh različnih točkah vzdolž trajektorije deljena s pretečenim časom. Za drug primer se lahko spomnimo mehanike tekočin, kjer se moramo zanimati za spremembe površine in prostornine zaznamovanega dela tekočine, ko se giblje po tokovnicah. Bralec se bo gotovo spomnil še mnogih primerov iz fizike, ko moramo spremljati spremembe fizikalnih količin medtem, ko se fizikalni sistem giblje.

Kako določimo pospešek avtomobila? Spodoben fizik bo na zeljevid vrisal njegovo pot, zapisal v zemljevid kdaj se je avto nahajal v dani točki in nato vrisal v zemljevid tangente na pot tako, da bo njihova dolžina sorazmerna hitrosti. Povprečni pospešek med postajo  $A$  in  $B$  bo končno določil tako, da bo paralelno prenesel vektor hitrosti iz točke  $A$  v točko  $B$ , odštél oba vektorja in ju delil s pretečenim časom. V gornjem predpisu ene operacije še nismo definirali. Nismo namreč eksplicitno povedali kako paralelno prenesti hitrost iz točke  $A$  v točko  $B$ . Če je zemljevid narisán v kartezičnem koordinatnem sistemu tako, da so vse razdalje na zemljevidu sorazmerne resničnim z enakim sorazmernostnim faktorjem in gre za majhne razdalje, se zdi, da znamo paralelno prenašati vektorje. Če pa imamo opravka npr. z zemljevidom celotne Evrazije, pričakujemo težave. Zato bomo o predpisu za paralelno premikanje natančneje razmislili.

Kako paralelno premaknemo daljico na papirju? Najlaže to naredimo na črtastem papirju, ki je izpolnjen s samimi paralelnimi črtami (premicami). Če oklepa vektor  $\underline{v}$  postavljen v točki  $\varphi$  kot  $\alpha$  s premico, ki gre skozi to točko  $\varphi$ , mora paralelno premaknjeni vektor v drugi točki  $\varphi'$  oklepati enak kot z ustrezno premico iz šopa paralelnih premic. Lahko si predstavljamo, da je šop paralelnih premic nekakšen šop silnic, glede na katerega je definiran paralelni premik.

Za nekaj časa pozabimo na paralelnost in se zanimajmo za šope krivulj v mnogoterosti, ki jo označimo z  $\mathbf{X}$ . Predstavljamo si jih kot silnice nekega polja (električnega, magnetnega ali kakega drugega). V izogib možnim zapletom vzemimo, da je šop - družina kriulj - tako bogat, da gre skoraj skozi vsako točko (samo končno število točk mnogoterosti je lahko izvzeto) mnogoterosti ena in ena sama krivulja. Označimo družino krivulj s  $\sigma(\varphi, t)$ . Pri tem je  $\varphi$  "ime" točke na mnogoterosti  $\mathbf{X}$  ( $\varphi \hat{=} \{x^1, x^2 \dots x^n\}$ ) skozi katero gre krivulja iz družine takrat, ko zavzame parameter  $t$  vrednost 0. Ko se parameter  $t$  večá, teče krivulja po točkah z "imeni"  $\sigma(\varphi, t)$ .

Tako velja:

$$\sigma(\varphi, t + s) = \sigma(\sigma(\varphi, t), s) \quad (\text{J.150})$$

V (skoraj) vsaki točki mnogoterosti lahko konstruiramo tangento na ustrezno krivuljo. Označimo jo z:

$$\underline{v}(\varphi) = \left. \frac{d}{dt} \sigma(\varphi, t) \right|_{t=0} \quad (\text{J.151})$$

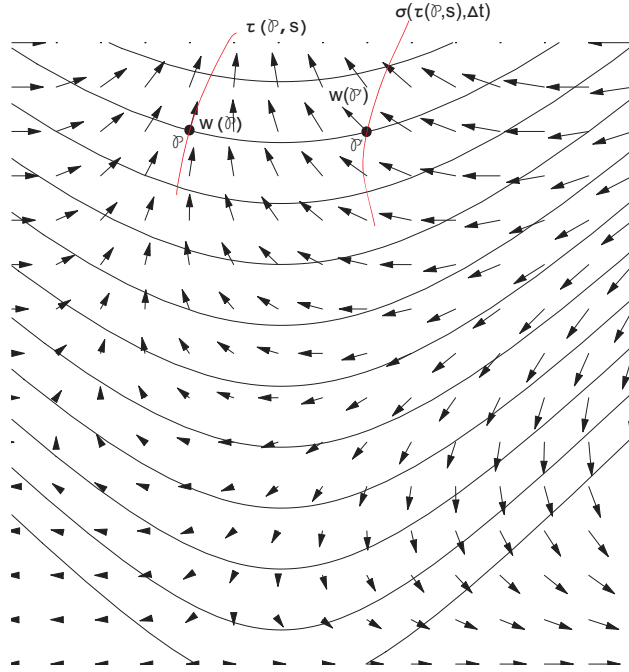
Množica vseh tangent predstavlja vektorsko polje. Tudi obratno se da pokazati: Če imamo vektorsko polje npr.  $\underline{v}$  lahko (pod določenimi pogoji zveznosti) na enoličen način konstruiramo družino krivulj, katerim so vektorji vektorskega polja tangente<sup>12</sup>. Vsako družino silnic lahko na naraven način uporabimo za preslikavo mnogoterosti same vase po predpisu, da se točka  $\varphi$  preslika v točko  $\sigma(\varphi, t)$ . Ta preslikava ima lastnosti grupe saj je preslikava preslikave po J.150 ponovno preslikava mnogoterosti same vase vzdolž prvotne družine silnic, obstaja tudi enotni element ( $\sigma(\varphi, 0) = \varphi$  - glej J.150!) in inverzna preslikava (če  $\varphi' = \sigma(\varphi, t) \implies \varphi = \sigma(\varphi', -t)$  - glej J.150!). Tej grupi pravimo **lokalna psevdogrupa**, vektorskemu polju  $\underline{v}$  pa **generator lokalne psevdogrupe**. Družini preslikav, ki jih generira vektorsko polje  $\underline{v}$  pravimo tudi *tok vektorskega polja*  $\underline{v}$ . S pomočjo lokalne psevdogrupe je mogoče prenašati geometrijske strukture med točkami mnogoterosti v smeri silnic polja  $\underline{v}$ . Vzemimo, da imamo na mnogoterosti poleg lokalne psevdogrupe še vektorsko polje  $\underline{w}$ . Silnice polja  $\underline{w}$  označimo s  $\tau$ , tako da je  $\underline{w}(\varphi) = \left. \frac{d}{dt} \tau(\varphi, t) \right|_{t=0}$  (Glej J.151). Naj bosta točki  $\varphi$  in  $\varphi'$  na silnici polja  $\underline{v}$  (glej sliko 4). Tako je  $\varphi' = \sigma(\varphi, \Delta t)$ . Silnica polja  $\underline{w}$ , ki gre skozi točko  $\varphi$ , je  $\tau(\varphi, t)$ . Skozi točko  $\varphi'$  pa gre silnica  $\tau(\varphi', t)$ . V splošnem, če polji  $\underline{v}$  in  $\underline{w}$  nista lokalno vzporedni, sta ti dve silnici različni. Element lokalne psevdogrupe (tista preslikava, ki preslika  $\varphi$  v  $\varphi'$ , oziroma tisti element za katerega je  $t = \Delta t$ ) preslika silnice polja  $\underline{w}$  v:

$$\tau(\varphi, s) \implies \sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t) \quad (\text{J.152})$$

Silnico, ki gre skozi točko  $\varphi$ , preslika lokalna psevdogrupa v krivuljo, ki gre skozi točko  $\varphi'$ . Skozi točko  $\varphi'$  tečeta dve krivulji - silnica  $\underline{w}$  ( $\tau(\varphi', s)$ ) in slika silnice  $\underline{w}$  ( $\sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t)$ ). Tangento na sliko silnice  $\sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t)$  smatramo za vektor  $\underline{w}(\varphi)$

---

<sup>12</sup>Za to, da lahko govorimo o vektorskem polju ali o p-formah na mnogoterosti ni potrebno imeti definirano razdaljo. Tangento v točki  $\varphi$  je še vedno mogoče definirati kot smer krivulje v točki  $\varphi$ . Bazna vektorska polja so npr. tista, vzdolž katerih se spreminja samo ustrezna koordinatna 0-forma. Tudi o 1 in p-formah lahko razmišljamo tako kot smo povedali. Bazne 1-forme npr. štejejo prirastek ustrezne bazne 0-forme vzdolž gibanja! Brez razdalje pa ne moremo govoriti o npr. velikosti vektorjev in o zvezi med vektorskimi polji in 1-formami. Metrika, ki lahko definira razdaljo med točkami na mnogoterosti, torej poveže vektorska polja in 1-forme, ni pa nujna sestavina teorije mnogoterosti.



Slika 4:

prenešen v točko  $\varphi'$  glede na lokalno psevdogrupo  $\sigma$  (z generatorjem  $\underline{v}$ ). Tako definiramo **Lie-jev odvod** vektorskega polja  $\underline{w}$  glede na generator lokalne psevdogrupe kot razliko med vektorjem  $\underline{w}(\varphi')$  in vektorjem  $\underline{w}(\varphi)$  prenešenim v točko  $\varphi'$  glede na lokalno psevdogrupo. To zapišemo takole:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w})|_{\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{ds}\tau(\varphi', s)|_{s=0} - \frac{d}{ds}\sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t)|_{s=0}}{\Delta t} \quad (\text{J.153})$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{ds}\tau(\sigma(\varphi, \Delta t), s)|_{s=0} - \frac{d}{ds}\sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t)|_{s=0}}{\Delta t} \quad (\text{J.154})$$

Upoštevamo, da je  $\sigma(\tau(\varphi, s), 0) = \tau(\varphi, s) = \tau(\sigma(\varphi, 0), s)$  in lahko gornje zapišemo še drugače:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w})|_{\varphi} = \quad (\text{J.155})$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{d}{ds}\tau(\sigma(\varphi, \Delta t), s) - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}s}\tau(\varphi, s) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}s}\tau(\varphi, s) - \frac{d}{ds}\sigma(\tau(\varphi, s), \Delta t) \right] \quad (\text{J.156})$$

(Dodali in odvzeli smo mastno tiskana člena.)

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{d}{ds} \tau(\sigma(\wp, \Delta t), s) - \frac{d}{ds} \tau(\sigma(\wp, 0), s) + \frac{d}{ds} \sigma(\tau(\wp, s), 0) - \frac{d}{ds} \sigma(\tau(\wp, s), \Delta t) \right] \quad (\text{J.157})$$

$$= \frac{d^2}{ds dt} \left[ \tau(\sigma(\wp, t), s) - \sigma(\tau(\wp, s), t) \right] \quad (\text{J.158})$$

Odtod je očitna antisimetričnost Lijevega odvoda glede na zamenjavo vektorskih polj, namreč:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w}) = -\mathcal{L}_{\underline{w}}(\underline{v}) \quad (\text{J.159})$$

Zaradi te lastnosti označujemo Lijev odvod dveh vektorskih polj tudi z oglatim oklepajem, kar nas spominja na prav tako antisimetrične Poissonove oklepaje:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w}) = [\underline{v}, \underline{w}] \quad (\text{J.160})$$

Tudi linearnosti Lijevega odvoda, ki jo zapišemo takole:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{u} + \underline{w}) = \mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{u}) + \mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w}) \quad , \quad (\text{J.161})$$

ni težko uvideti.

**Naloga 10.6.1** Če so  $v^i(\wp)$  in  $w^k(\wp)$  komponente vektorskih polj  $\underline{v}$  in  $\underline{w}$ , pokaži, da se Lijevega odvod s komponentami izraža takole:

$$[\underline{v}, \underline{w}] = \left( \frac{\partial w^i}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} w^k \right) \underline{e}_i \equiv \quad (\text{J.162})$$

$$[\underline{v}, \underline{w}] = \left( \frac{\partial w^i}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} w^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{J.163})$$

Lijev odvod za vektorje je operacija, ki nas je posebej zanimala. Smiselno je na analogen način definirati operacijo Lijev odvod za polje poljubnih struktur na mnogoterosti. Z lokalno psevdogruppo namreč preslikujemo mnogoterost samo vase - vsaka točka mnogoterosti  $\wp$  se pod vplivom elementa lokalne psevdogrupe preslika v svojo sliko  $\wp'$ . Strukturo  $v$  (infinitesimalni) okolici točke  $\wp$  preslikamo tako, da preslikamo množico točk, ki ji struktura pripada v okolico točke  $\wp'$ . V okolici točke  $\wp'$  imamo tako originalno strukturo in strukturo, ki jo je tja prenesel element lokalne psevdogrupe. Ko ti dve odštejemo in delimo s prirastkom parametra psevdogrupe, dobimo Lijev odvod strukturnega polja v točki  $\wp'$ .

Najbolj preprosto je zapisati Lijev odvod 0-forme. Po tem, kar smo povedali, ga zapišamo takole:

$$\mathcal{L}_{\underline{w}}f^{(0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f^{(0)}(\wp') - f^{(0)}(\wp)}{\Delta t}, \quad (\text{J.164})$$

pri čemer je  $\wp' = \sigma(\wp, \Delta t)$  ali v koordinatah:  $x_{\wp'}^i = x_{\wp}^i + v^i \Delta t$  ( $\underline{v} = \frac{d\sigma}{dt}$ ). Zgornje lahko zato še napišemo:

$$\mathcal{L}_{\underline{w}}f^{(0)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f^{(0)}(x_{\wp}^i + v^i \Delta t) - f^{(0)}(x_{\wp}^i)}{\Delta t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^i} v^i \quad (\text{J.165})$$

To je običajni odvod funkcije v smeri vektorja  $\underline{v}$ .

Izračunajmo še Lijev odvod produkta vektorskega in skalarnega polja! Naj bo  $\underline{u} = \alpha \underline{w}$ . V skladu z J.154 je

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{u})|_{\wp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\wp') \frac{d}{ds} \tau(\wp', s)|_{s=0} - \alpha(\wp) \frac{d}{ds} \sigma(\tau(\wp, s), \Delta t)|_{s=0}}{\Delta t} \quad (\text{J.166})$$

Ker je po J.165  $\alpha(\wp') = \alpha(\wp) + \mathcal{L}_{\underline{v}}\alpha \Delta t$ , velja:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\alpha \underline{w})|_{\wp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\alpha(\wp) + \mathcal{L}_{\underline{v}}(\alpha) \Delta t) \frac{d}{ds} \tau(\wp', s)|_{s=0} - \alpha(\wp) \frac{d}{ds} \sigma(\tau(\wp, s), \Delta t)|_{s=0}}{\Delta t} \quad (\text{J.167})$$

Torej:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\alpha \underline{w}) = \mathcal{L}_{\underline{v}}(\alpha) \underline{w} + \alpha \mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w}) \quad (\text{J.168})$$

Pravimo, da podleže Lijev odvod Leibnitzovemu pravilu, ki velja bolj splošno kot smo pokazali zgoraj, za vsak produkt definiran na mnogoterosti. Tudi npr.

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{u} \otimes \underline{w}) = \mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{u}) \otimes \underline{w} + \underline{u} \otimes \mathcal{L}_{\underline{v}}(\underline{w}) \quad (\text{J.169})$$

Pa še Lijev odvod za 1-forme! Vzemimo koordinatno 1-formo npr.  $\mathbf{d}x^{i_0}$ . Povedali smo že, da meri 1-forma  $\mathbf{d}x^{i_0}$  prirastek koordinatne 0-forme  $x^{i_0}$  vzdolž krivulje, ki se zvija po prostoru. Kako si moramo v skladu s tem predstavljati delovanje forme  $\mathbf{d}x^{i_0}$  iz točke  $\wp$ , ki jo je lokalna psevdogrupa prenesla v točko  $\wp'$ . Lokalna psevdogrupa je preprosto prenesla imena koordinat - točka  $\wp$ , ki je imela pred delovanjem lokalne psevdogrupe koordinate  $x^i$ , ima po delovanju koordinate  $\sigma(\wp, \Delta t) \hat{=} x^i + v^i(\wp) \Delta t$ . Po tem, kar smo povedali zgoraj, je:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(\mathbf{d}x^{i_0}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}(x^{i_0} + v^{i_0}(\wp) \Delta t) - \mathbf{d}x^{i_0}}{\Delta t} = \quad (\text{J.170})$$



$$= \mathbf{d}v^{i_0} = \frac{\partial v^{i_0}}{\partial x^k} \mathbf{d}x^k \quad (\text{J.171})$$

Tudi za Lijev odvod 1-form velja Leibnitzovo pravilo (Prepričaj se sam!). Zato lahko zapišemo, kako se izraža Lijev odvod sploše 1-forme, če je zapisana kot linearna kombinacija baznih 1-form:

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(f^{(1)}) = \mathcal{L}_{\underline{v}}(f_i \mathbf{d}x^i) = \mathcal{L}_{\underline{v}}(f_i) \mathbf{d}x^i + f_i \mathcal{L}_{\underline{v}}(\mathbf{d}x^i) = \quad (\text{J.172})$$

$$\mathcal{L}_{\underline{v}}(f_i \mathbf{d}x^i) = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} v^k \mathbf{d}x^i + f_i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \mathbf{d}x^k = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} v^k \mathbf{d}x^i + f_k \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \mathbf{d}x^i = \quad (\text{J.173})$$

$$= \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x^k} v^k + f_k \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right] \mathbf{d}x^i \quad (\text{J.174})$$

Po Leibnitzovem pravilu lahko sedaj zapišemo Lijev odvod poljubne p-forme ali poljubnega tenzorskega polja, ki se izraža z direktnim produktom form in (ali) vektorskih polj.

Lokalna psevdogrupa je preslikava mnogoterosti same vase. Če je Lijev odvod nekega vektorskega (ali tenzorskega) polja glede na lokalno psevdogrupu enak 0, potem pravimo, da je to vektorsko (ali tenzorsko) polje invariantno glede na to lokalno psevdogrupu. Vektorsko polje, ki ga dobimo, če paralelno prenesemo nek vektor v vse točke na ravnini, je prav gotovo v tem smislu invariantno glede na lokalno psevdogrupu, katere silnice so paralelne premice na papirju. Lokalna psevdogrupa, ki omogoča paralelen prenos, ni katerakoli lokalna psevdogrupa, ki bi jo lahko definirali na ravnini, ampak ima neke posebne lastnosti. Te lastnosti so povezane s simetrijo take mnogoterosti kot jo realizira list papirja. Zato bomo še za kratek čas odložili razpravo o paralelnem prenosu in si privoščili kratek izlet med Lijeve grupe.

Razpravo začnemo z lokalno psevdogrupu. To je množica preslikav mnogoterosti same vase, pri katerih se točka  $\varphi$  preslika v  $\varphi' = \sigma(\varphi, t)$  in velja J.150. Element lokalne psevdogrupe označuje parameter  $t$ , ki je v zvezi z velikostjo premika med  $\varphi$  in  $\varphi'$ . Množica elementov lokalne psevdogrupe je zato izomorfna množici naravnih števil in jo lahko smatramo kot enorazsežno mnogoterost.

Lokalna psevdogrupa je torej množica transformacij mnogoterosti same vase, s katerimi se točke mnogoterosti premikajo vzdolž silnic, ki jih generira tok vektorskega polja lokalne psevdogrupe. Zamislimo si širšo množico preslikav, ki jo bomo imenovali  $G$ , njene elemente pa  $g$ . V množici  $G$  naj bo dovolj elementov, da lahko vedno najdemo vsaj enega, ki preslika poljubno točko  $\varphi$  na mnogoterosti v poljubno drugo točko  $\varphi'$ . Elementi ( $g$ ) te množice naj delujejo na mnogoterost  $\mathbf{X}$  (tej mnogoterosti pripadajo točke  $\varphi$ ) natanko na enak način kot elementi lokalne psevdogrupe - poljubno točko  $\varphi$  premaknejo v drugo točko  $\varphi' = \sigma(\varphi, g)$ . Množica  $G$  z elementi

$g$  je gotovo bogatejša od množice naravnih števil, saj je treba npr. za preslikavo točke  $\wp$  v  $\wp'$  povedati, kolikšen premik imamo v mislih v vsako od možnih smeri na mnogoterosti  $\mathbf{X}$ . Množica  $G$  je morda lahko izomorfna mnogoterosti  $\mathbf{X}$  na katero delujejo elementi  $g$ , lahko pa ima tudi kakšno drugačno dimenzijo. Kot ima element  $\wp$  mnogoterosti  $\mathbf{X}$  v splošnem  $n$  komponent, to je prav toliko kot je razsežnost te mnogoterosti, ima torej  $g$ , element množice  $G$ , v splošnem recimo  $p$  komponent  $g \hat{=} \{g^1, g^2 \dots g^p\}$ .

Preslikave z elementi množice  $G$  imajo smisel samo, če vlada v  $G$  kakšen red. O smiselnem redu govorimo takrat, kadar predstavlja množica  $G$  Liejevo grupo z naslednjimi lastnostmi:

i) kompozit dveh elementov  $g$  in  $h$  grupe  $G$  je tudi element grupe  $G$  označen z  $gh$ , ki preslikuje v mnogoterosti  $\mathbf{X}$  tako, da najprej preslika s  $h$ , nato pa še z  $g$ , torej, če  $g$  in  $h$  preslikujeta takole:

$$g: \wp \longrightarrow \sigma(\wp, g) \quad \text{in} \quad h: \wp \longrightarrow \sigma(\wp, h) \quad , \quad (\text{J.175})$$

potem preslikuje kompozit  $gh$  v:

$$gh: \wp \longrightarrow \sigma(\sigma(\wp, h), g) \quad (\text{J.176})$$

ii) obstaja enota  $e$  - identična transformacija, ki preslika vsako točko na  $\mathbf{X}$  samo vase.

iii) Grupa  $G$  naj deluje **efektivno** na mnogoterost  $\mathbf{X}$ , kar pomeni, da je enota edini element grupe, ki preslika vsako točko  $\wp$  na mnogoterosti  $\mathbf{X}$  samo vase.

iv) Grupa naj deluje na mnogoterost  $\mathbf{X}$  tranzitivno, kar pomeni, da obstaja za vsak par točk  $\wp$  in  $\wp'$ , ki pripadata mnogoterosti  $\mathbf{X}$ , element grupe  $G$ , ki preslika  $\wp$  v  $\wp'$ .

Množica elementov  $g(t) (\hat{=} \{g^1(t), g^2(t), \dots g^n(t)\})$  na mnogoterosti  $G$  je lahko krivulja, če ima vsak element  $g(t)$  prednika in naslednika, ki sta mu poljubno blizu. (Pozor!  $g$  niso točke v "prostoru- v mnogoterosti  $\mathbf{X}$ -, ki jih ponavadi označujemo s  $\wp$ ; vsaka "točka"  $g(t)$  na tej krivulji predstavlja preslikavo mnogoterosti  $\mathbf{X}$  samo vase in je lahko karakterizirana s tem, v katero točko  $\wp'$  preslika originalno točko  $\wp$ .) . Če je:

$$g(0) = e \quad (\text{J.177})$$

in

$$g(t)g(s) = g(t+s) \quad , \quad (\text{J.178})$$

tvorijo elementi krivulje grupo, ki jo imenujemo **enoparametrična podgrupa** Liejeve grupe  $G$ <sup>13</sup>

---

<sup>13</sup>Bralca velja morda opozoriti, da pogoj J.178 nikakor ni nezahteven in ni ekvivalenten J.150.

Enoparametrična podgrupa v mnogoterosti  $G$  je torej množica zaporednih preslikav na mnogoterosti  $\mathbf{X}$ .  $g(0)$  preslika vsako točko  $\wp$  samo vase (J.177),  $g(t)$  pa preslika  $\wp$  v  $\sigma(\wp, g(t))$ , kar je v splošnem neka druga točka. Ko teče  $t$  po naraščajočih vredostih, teče slika točke  $\wp$  po krivulji v mnogoterosti  $\mathbf{X}$ . Krivulje v  $G$ , ki so hkrati enoparametrične podgrupe  $G$ , generirajo krivulje v  $\mathbf{X}$ , ki so sledi preslikav  $\sigma(\wp, g(t))$  za vsako posamezno točko  $\wp$ . Krivuljo, ki jo generira preslikava za specifično točko  $\wp$ , imenujemo sliko enoparametrične podgrupe na  $\wp$ . Vse slike enoparametrične podgrupe predstavljajo šop silnic v  $\mathbf{X}$ , njihove tangente pa vektorsko polje. To polje imenujemo **Killingovo vektorsko polje** grupe  $G$ .

Pomembno vlogo pri študiju Lijevih grup imajo tkim. **leva translacija** in **desna translacija**. Leva translacija (za  $g$ ), ki jo označimo z  $L_g(h)$ , je operacija ki priredi vsakemu elementu  $h$  grupe  $G$  element grupe  $gh$ , pri čemer je  $g$  tudi element grupe  $G$ . Desna translacija, označena z  $R_g(h)$  (Desna = **R**ight po angleško) pa priredi elementu grupe  $h$  element  $hg$ <sup>14</sup>. V komponentah zapišemo:

$$L_g(h) = gh \implies L^\alpha(g^\beta h^\gamma) \quad (\text{J.179})$$

in seveda:

$$R_g(h) = hg \implies R^\alpha(g^\beta h^\gamma) \quad (\text{J.180})$$

Jasno je, da mora biti:

$$L_g(e) = g \quad \text{in seveda} \quad R_g(e) = g \quad (\text{J.181})$$

Povedali smo že, da si lahko v mnogoterosti  $G$  (ne v  $\mathbf{X}$ !) predstavljamo krivulje  $(g(t) = \{g^1(t) \dots g^n(t)\})$  pa tudi snope krivulj  $h(g, t)$ , pri čemer se dogovorimo, da naj bo  $h(g, 0) = g$ . Gornjemu snopu ustreza vektorsko polje  $(\underline{w}(g) = \frac{d}{dt}h(g, t)|_{t=0})$ . Posebej zanimiva so tista vektorska polja, ki so **invariantna glede na desne (leve) translacije**. To pomeni naslednje: Naj bo  $h(g, t)$  snop krivulj (na mnogoterosti  $G$ ),  $L_k(h(g', t))$  pa za  $k$  levo pomaknjen snop krivulj. Če se ta dva snopa ujemata,

---

<sup>14</sup>Morda bo bralcu v pomoč, če pojasnimo odkod imeni leva in desna translacija. Ime translacija izvira iz primera translacijske grupe, ki je tipična Lijeva grupa. Ni težko videti, da zadoščajo translacije v ravnini vsem zahtevam za Lijeve grupe. Če ima element grupe  $g$  komponenti  $\Delta x$  in  $\Delta y$ , element  $h$  pa  $\Delta x'$  in  $\Delta y'$ , potem ima  $gh$  komponenti  $\Delta x + \Delta x'$  in  $\Delta y + \Delta y'$ . Torej leva translacija  $(gh)$  poveča vsako translacijo  $h = \{\Delta x', \Delta y'\}$  za  $\{\Delta x, \Delta y\}$ . Desna translacija  $hg$  ima za translacijsko grupo isti rezultat, kot leva translacija - translacijska grupa je komutativna. Leva translacija torej ne pomeni translacije v levo; leva translacija lahko pomeni premik v levo, v desno, navzgor ali navzdol odvisno pač od velikosti in znakov "translacijskih konstant"  $\Delta x, \Delta y$ . Med levo in desno translacijo moramo razlikovati pri grupah, ki niso komutativne. Leva translacija pomeni, da stoji tisti element s katerim premikamo ( $g$  v našem primeru) na levi elementa, ki bo premaknjen ( $h$  v našem primeru) in obratno za desno translacijo

potem je vektorsko polje  $\underline{w}$  levo invariantno vektorsko polje (in podobno za desno invariantnost). Z drugimi besedami: če tečeta krivulji  $h(g, t)$  in  $R_k(h(g', t))$  skozi isti element  $g_0$  in se v tej točki njuni tangenti ujemata in to velja za vse  $g_0$ , je snop  $h(g, t)$  invarianten glede na leve translacije. Spomnimo se Lijevega odvoda pa lahko rečemo, da je vektorsko polje  $\underline{w}$  levo invariantno, če je Lijev odvod polja  $\underline{w}$  po generatorju desnih translacij enak 0. <sup>15</sup>

Poglejmo si, kaj to pomeni na preprostem primeru. Naj bo prvotna mnogoterost  $\mathbf{X}$  ravnina  $x - y$  (s točkami  $\varphi$ ),  $G$  pa množica vseh translacij v tej ravnini. Vsak element množice  $G$  opišemo z dvema številčkama  $\Delta x$  in  $\Delta y$ , ki povesta za koliko ta element premakne vsako točko  $\varphi$  v smeri osi  $x$  in za koliko v smeri osi  $y$ . Tudi elemente množice  $G$  si torej lahko mislimo urejene v ravnini. Krivulja  $g(t)$  v mnogoterosti  $G$  predstavlja množico zaporednih translacij za  $\Delta x(\tau)$ ,  $\Delta y(\tau)$ . Krivulja  $g(t) := \{\Delta x(t), \Delta y(t)\}$  je enoparametrična podgrupa, če je v skladu z J.177 in J.178:

$$\{\Delta x(0), \Delta y(0)\} = \{0, 0\} \quad (\text{J.182})$$

in

$$\{\Delta x(t+s), \Delta y(t+s)\} = \{\Delta x(t), \Delta y(t)\} + \{\Delta x(s), \Delta y(s)\} \quad (\text{J.183})$$

Ta dva pogoja sta izpolnjena samo, če sta  $\Delta x$  in  $\Delta y$  linearni funkciji parametra  $t$  z vrednostjo 0 v  $t = 0$ . V "ravnini"  $G$  so torej enoparametrične podgrupe premice skozi izhodišče. Slika enoparametrične podgrupe  $g(t) (= \{v_x t, v_y t\})$  v mnogoterosti  $X$  na točki  $\varphi = \{x_0, y_0\}$  je premica  $x = x_0 + v_x t$ ,  $y = y_0 + v_y t$ . Slike podgrupe  $g(t)$  na vseh točkah v mnogoterosti  $X$  tvorijo šop (vzporednih) premic. Vse tangente na te premice pa tvorijo Killingovo vektorsko polje (v našem primeru vzporednih vektorjev) podgrupe  $g(t)$ .

Vzemimo snop krivulj  $h(g, t) = \{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t), h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t)\}$  v mnogoterosti  $G$ ! Translacija (desna ali leva je tu vseeno)  $L_k$  transformira ta snop v  $L_k[h(g, t)] = \{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t) + \Delta x_k, h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t) + \Delta y_k\}$ , pri čemer sta  $\{\Delta x_k, \Delta y_k\}$  komponenti translacije  $L_k$ . Snop  $h(g, t)$  je translacijsko invarianten, če je identičen snopu  $L_k[h(g, t)]$ , oziroma, če je v skladu z J.154:

$$\frac{d}{dt}h(L_k g, t) - \frac{d}{dt}L_k h(g, t) = 0 \quad , \quad (\text{J.184})$$

kar mora veljati za obe komponenti  $h_x$  in  $h_y$  ( $h_i$ ,  $i = 1, 2$ ). Torej:

$$\frac{d}{dt}[h_i(g_j + k_j, t) - h_i(g_j, t) - k_i] = 0 \quad (\text{J.185})$$

---

<sup>15</sup>Čeprav smo definirali Lijev odvod z drugačnim motivom na mnogoterosti  $\mathbf{X}$ , ki jo imamo pogosto za model fizikalnega prostora. Tu je govora o bolj abstraktni mnogoterosti  $G$ , katere elementi so preslikave mnogoterosti  $\mathbf{X}$  same vase.

Ni se težko prepričati, da so edine funkcije, ki rešijo gornjo enačbo:

$$h_i(g_j, t) = \Lambda_i^j g_j + v_i t + h_i^0 \quad (\text{J.186})$$

Ker mora biti po dogovoru  $h(g, 0) = g$ , ugotovimo, da se translacijsko invariantni snopi zapišejo takole:

$$h_i(g_j, t) = g_i + v_i t \quad (\text{J.187})$$

Na mnogoterosti  $G$  je to snop "vzporednih premic", ki tečejo v smeri vektorja  $\underline{v} = \{v_x, v_y\}$ . Mnogoterost  $X$  in mnogoterost  $G$  sta v tem primeru in samo v tem primeru izomorfni. Killingovo vektorsko polje se tu izomorfno preslika na polje translacijsko invariantnih snopov v  $G$ . Ta izjemna simetrija pri realizaciji translacijske grupe je morda odgovorna za to, da dolgo časa nismo znali dosledno ločevati med mnogoterostjo  $X$ , ki smo jo imenovali "fizikalni prostor" in mnogoterostjo  $G$ , ki ustreza translacijski grupi.

Manj zavajajoče očitno je primer rotacijske grupe  $SO3$ . Naj bo mnogoterost  $X$  sestavljena iz vseh točk na krogli,  $G$  pa naj bo množica vseh rotacij, to je transformacij krogle same vase.

Če označimo točke na krogli z  $\{x, y, z\}$ , pri čemer je  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , lahko realiziramo vse preslikave krogle same vase z rotacijskimi matrikami  $\mathcal{R}$  ranga 3, ki imajo lastnost  $\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}} = I$ . Če je namreč  $\{x, y, z\}$  točka na krogli, ker ustreza  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , je tudi  $\{x', y', z'\} = \{x, y, z\}\mathcal{R}$  na krogli, kajti:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \{x', y', z'\} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \quad (\text{J.188})$$

$$\{x, y, z\}\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{x, y, z\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a^2 \quad (\text{J.189})$$

Množica  $G$ , ki smo jo realizirali z matrikami  $\mathcal{R}$  je grupa, ker:

- i) je produkt dveh ortogonalnih matrik tudi ortogonalna matrika (če  $\mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}} = I$  in  $\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}} = I$ , je  $\mathcal{A}\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}) = \mathcal{A}\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}} = I$ )
- ii) obstaja enota ( $I$ )
- iii) obstaja inverzni element ( $\mathcal{R}^{-1} = \tilde{\mathcal{R}}$ )
- iv)  $G$  deluje na  $X$  efektivno, ker je  $I$  res edina preslikava, ki preslika vsako točko na krogli samo vase
- v)  $G$  deluje na  $X$  tranzitivno, ker lahko vedno najdemo rotacijsko matriko, ki preslika poljubno točko na krogli v poljubno drugo točko.

Grupa  $G$  ima enoparametrične podgrupe, ki so zvezne rotacije okrog izbrane osi. Predstavnik enoparametričnih podgrup je npr. krivulja:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\dot{\psi}t), \sin(\dot{\psi}t), 0 \\ -\sin(\dot{\psi}t), \cos(\dot{\psi}t), 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{J.190})$$

saj velja:

$$\mathcal{A}(0) = I \quad (\text{J.191})$$

in

$$\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\dot{\psi}t), \sin(\dot{\psi}t), 0 \\ -\sin(\dot{\psi}t), \cos(\dot{\psi}t), 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\dot{\psi}s), \sin(\dot{\psi}s), 0 \\ -\sin(\dot{\psi}s), \cos(\dot{\psi}s), 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} = \quad (\text{J.192})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\dot{\psi}t)\cos(\dot{\psi}s) - \sin(\dot{\psi}t)\sin(\dot{\psi}s), \cos(\dot{\psi}t)\sin(\dot{\psi}s) - \sin(\dot{\psi}t)\cos(\dot{\psi}s), 0 \\ -\sin(\dot{\psi}t)\cos(\dot{\psi}s) - \cos(\dot{\psi}t)\sin(\dot{\psi}s), -\sin(\dot{\psi}t)\sin(\dot{\psi}s) + \cos(\dot{\psi}t)\cos(\dot{\psi}s), 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} = \quad (\text{J.193})$$

$$= \mathcal{A}(t+s) \quad (\text{J.194})$$

Element podgrupe  $\mathcal{A}(t)$  zavrti kroglo (mnogoterost  $X$ ) okrog osi  $z$  za kot  $\dot{\psi}t$ . Slike točke  $\wp$  v  $X$  glede na podgrupo  $\mathcal{A}$

Torej če lahko za vsak  $\Delta x_0, \Delta y_0$  in  $t$  najdemo tak  $t'$ , da velja:

$$\{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t), h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t)\} = \quad (\text{J.195})$$

$$\{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t') + \Delta x_k, h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t') + \Delta y_k\} \quad (\text{J.196})$$

in

$$\frac{d}{dt}\{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t), h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t)\} = \quad (\text{J.197})$$

$$\frac{d}{dt}\{h_x(\Delta x_0, \Delta y_0, t) + \Delta x_k, h_y(\Delta x_0, \Delta y_0, t) + \Delta y_k\}|_{t=t'} \quad (\text{J.198})$$

Ni se težko prepričati, da gornje velja samo, če je  $h_x(\Delta x, \Delta y, t) = h_x^0(\Delta x, \Delta y) + \alpha k_x t$  in  $h_y(\Delta x, \Delta y, t) = h_y^0(\Delta x, \Delta y) + \alpha k_y t$ , pri čemer je  $\alpha$  poljubna od nič različna konstanta; ker je  $\alpha t$  tudi dober parameter, lahko vedno izberemo  $\alpha = 1$ . Spomnimo se še, da smo se prej dogovorili, da naj za vsak snop krivulj velja  $h(g, 0) = g$ , pa ugotovimo, da so enačbe translacijsko invariantnih krivulj v našem  $G$ :

$$\begin{pmatrix} h_x(\Delta x, \Delta y, t) \\ h_y(\Delta x, \Delta y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \quad (\text{J.199})$$

V mnogoterosti  $G$  nam torej vsaka translacija za  $\{k_x, k_y\}$  generira snop translacijsko invariantnih krivulj 10.6.20. Vse krivulje v mnogoterosti  $G$ , ki so invariantne glede na translacijo  $L_k$  so tako podane s tangento na tisto krivuljo iz snopa, ki gre skozi izhodišče (enotni element grupe  $G$ ). Pokazati se da, da obstaja enolična korespondenca med množico levo invariantnih vektorskih polj in med množico tangent na ta polja v točki  $e$  mnogoterosti  $G$ . V bolj slikovitem jeziku bi lahko rekli, da izvemo vse o mnogoterosti  $G$  samo v okolici enote ( $e$ ).