

2

ASTRONOMIJA

Andrej ČADEŽ

FIZIKA ZVEZD

prof. dr. Andrej Čadež

*Oddelek za fiziko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

Uroš Cvelbar

*Oddelek za fiziko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

Ljubljana, 1999

© UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
JADRANSKA 19, 1000 LJUBLJANA  
SLOVENIJA

# Predgovor

Ta skripta je nekoliko razširjen zapis predavanj iz astronomije na Fakulteti za matematiko in fiziko. Namen predavanj je seznaniti poslušalce s fizikalnimi osnovami, ki igrajo najvažnejšo vlogo pri razumevanju življenja zvezd.

Skripta temelji na predpostavki, da je bralec seznanjen z osnovnimi pojmi iz astronomije. Med potrebno predznanje spada predvsem poznavanje osnovnih merljivih karakteristik zvezde in merskih enot v astronomiji. Primerjava teoretičnih modelov z eksperimentom zato ni podrobno obdelana.

Astrofizika zvezd in opazovalna astronomija korakata vzporedno; astronomi napredujejo z vse boljšimi metodami in boljšo opremo, astrofiziki pa jih dohitevajo z natančnejšimi podatki iz atomske in jedrske fizike ter boljšimi računalniki, ki zmorejo boljše izračune teoretičnih modelov. Večjih neskladji med teorijo in meritvami v glavnem ni.

Poudariti pa velja, da vlada to razmeroma mirno razumevanje samo na področju fizike "normalnih" zvezd. Pri poznih fazah razvoja zvezde in še posebej pri galaksijah ter v kozmologiji pa je naše razumevanje procesov nezadostno.

V teh predavanjih se bomo omejili na varno področje "normalnih" zvezd, to je takih, v katerih tečejo jedrske reakcije in v katerih je snov v stanju idealnega plina. Dejstvo, da spada večina zvezd, ki jih opazujemo, v to kategorijo, opravičuje ime "normalne" zvezde in naše zanimanje za to zvrst. Ko bomo razpravljali o splošnih lastnostih zvezdne snovi, se bomo ustavili tudi pri nekaterih eksotičnih možnostih, ki se pojavijo, kadar zvezda zapusti družino "normalnih".

Skripta je sestavljena iz treh osnovnih in treh dodatnih poglavji. V prvem delov (Enačbe zvezdne strukture) bomo izpeljali tako imenovane enačbe zvezdne strukture - to so enačbe, ki sledijo iz pogojev mehanskega in energijskega ravnovesja v zvezdi. S pomočjo teh enačb bomo ocenili nekatere pomembne karakteristike zvezd.

V drugem delov (Lastnosti snovi v zvezdah) bomo razpravljali o karakteristikah zvezdne snovi. Nakazali bomo metode za izpeljavo enačbe stanja zvezdne snovi, za računanje hitrosti jedrskih reakcij in za računanje prosojnosti zvezdne snovi. Namen teh poglavji je predvsem pokazati metode dela v astrofiziki in omogočiti bralcu da presodi, koliko danes lahko povedo modeli zvezd.

V tretjem delu (Modeli zvezd) je opisanih nekaj modelov zvezd. Obdelava teh modelov je precej zahtevna, enačbe pa je potrebno reševati numerično. To delo bi

močno preseгло okvir te skripte, zato se zadovoljimo samo z opisom rezultatov, s katerimi poskušamo ilustrirati fiziko zvezd. Nakazali bomo tudi nekaj smeri preprostemu analitičnemu reševanju ob preprostih predpostavkah. Za konec pa si bomo ogledali še nekaj modelov eksotičnih zvezd in nam dobro znano zvezdo - Sonce in njegov sistem.

Ta skripta torej poslušalca predmeta astronomija na Fakulteti za matematiko in fiziko, Univerze v Ljubljani, seznanila le z enim delom snovi potrebne za izpit. Fizika zvezd je zgolj drugi del literature. Celoten predmet pa sestavljajo tri večja področja; SPLOŠNA ASTRONOMIJA, FIZIKA ZVEZD in KOZMOLOGIJA.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Klasifikacija zvezdnih struktur</b>	<b>7</b>
1.1	Spektralni tipi . . . . .	7
1.2	HR diagram in razvoj zvezd . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Enačbe zvezdne strukture</b>	<b>15</b>
2.1	Mehansko in toplotno ravnovesje . . . . .	15
2.2	Relaksacijski časi . . . . .	18
2.3	Prenos energije . . . . .	25
2.3.1	Prevajanje s sevanjem . . . . .	25
2.3.2	Prevajanje s konvekcijo . . . . .	28
2.4	Naloge . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Lastnosti snovi v zvezdah</b>	<b>31</b>
3.1	Enačbe stanja in stanje snovi v zvezdah . . . . .	31
3.2	Jedrske reakcije . . . . .	35
3.2.1	Zlivanje vodika v helij . . . . .	35
3.2.2	Gorenje helija . . . . .	40
3.3	Prosojnost zvezdne snovi . . . . .	41
3.3.1	Thomsonovo sipanje . . . . .	43
3.3.2	Prosto-prosta absorpcija . . . . .	43
3.3.3	Vezano-prosta in vezano-vezana absorpcija . . . . .	43
3.4	Naloge . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Modeli zvezd</b>	<b>47</b>
4.1	Homogeni modeli . . . . .	48
4.2	Dodatek: Poenostavljeni zvezdni modeli . . . . .	52
4.2.1	Linearni model zvezde . . . . .	52
4.2.2	Politropni model zvezde . . . . .	53
4.3	Naloge . . . . .	53

---

<b>5 Končna faza razvoja zvezd</b>	<b>55</b>
5.1 Modeli končnih stanj . . . . .	59
5.1.1 Bele pritlikavke . . . . .	60
5.1.2 Nevtronske zvezde ali pulzarji . . . . .	61
5.1.3 Črne luknje . . . . .	63
5.2 Naloge . . . . .	66
<b>6 Sonce in Sončni sistem</b>	<b>69</b>
6.1 Zgradba Sonca . . . . .	69
6.2 Pojavi na Soncu . . . . .	74
6.3 Sončni sistem . . . . .	77
6.4 Naloge . . . . .	80
<b>7 Dodatek</b>	<b>83</b>
7.1 Dodatek A: Tabele teles sončnega sistema . . . . .	83
7.2 Dodatek B: Rešitev nalog . . . . .	86
7.2.1 Naloga 5.2 . . . . .	90

# Poglavje 1

## Klasifikacija zvezdnih struktur

Pred obravnavo stanja snovi in enačb zvezdnih struktur si bomo ogledali različne tipe zvezdnih struktur. Te dobimo s pomočjo barvnih indeksov in spektrov, ki so danes najmočnejše "orožje" astronomije. In kaj nam povedo ti podatki o zvezdnih strukturah? Povedo nam starost, velikost, izsev, maso in razvoj zvezdne strukture.

### 1.1 Spektralni tipi

Za nas bo najbolj zanimiv optični del spektra, ki obsega porazdelitev gostote svetlobnega toka po vidni valovni dolžini. Ta spekter je zvezen pri trdnih in kapljevinskih svetilih, pri plinskih pa črtast. Valovne dolžine spektralnih črt so značilne za kemijski element ali molekulo, ki seva ali absorbira. Spektralne črte nastanejo zaradi prehodov zunanjih elektronov v atomih na nižji ali višji energijski nivo. Razlika v energiji med dvema energijskima nivojema ustreza energiji fotona, ki je odvisna od frekvence izsevane ali absorbirane svetlobe med prehodom elektrona z enega na drugi nivo. Za preprost *Bohrov model*<sup>1</sup> vodikovega atoma, kjer en elektron kroži okoli jedra ima elektron v  $n$ -tem stanju energijo

$$E_n = -\frac{1}{2}m_e c^2 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon\hbar c} \right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2},$$

kjer je člen  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon\hbar c} = \alpha_f = \frac{1}{137}$  konstanta fine strukture,  $m_e c^2 = 0.51 \cdot 10^6 \text{ eV}$ ,  $E_0 = 13.6 \text{ eV}$  Hartreejeva energija in  $n$  je enak 1,2,..., kar pomeni, da je energija kvantizirana. Elektron, ki kroži okoli jedra ima lahko samo eno od teh kvantiziranih energij, lahko pa preskakuje med temi stanji in pri tem sprejme ali odda foton, katerega

---

<sup>1</sup>Bohrov model ni povsem v skladu z kvantno mehaniko ter Heisenbergovim principom nedoločenosti, toda da pravi red rezultatov.

energija ustreza razliki energij med posameznimi stanji. Tako naprimer, ko gre elektron iz stanja  $n$  v stanje  $m$ , če je  $n > m$ , dobimo emisijo fotona z energijo

$$E_n - E_m = E_0 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

če pa je  $n < m$ , dobimo absorpcijo fotona z energijo

$$E_m - E_n = E_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Frekvenca fotona pa ustreza kar njegovi energiji  $E = h\nu$ , ki je npr. za rumeno svetlobo  $\simeq 2.5 \text{ eV}$ .

Pri molekulah se tem prehodom pridružijo še prehodi, ki so povezani z vrtenjem molekul ali nihanjem atomov v molekulah.

Absorpcija svetlobe je močno odvisna od frekvence. Vsaka snov ima absorpcijski spekter, ki je zanjo značilen. Črte absorpcijskega spektra pa dobimo samo s plini posameznih atomov. Absorpcijski spekter dobimo torej, če gre svetloba iz vira skozi absorpcijski material, preden dospe do nas.

Zvezde imajo tako različne spektre, ki so posledica absorpcije svetlobe v plinih, površinske temperature in drugih dejavnikov v zvezdni atmosferi. Tako so zvezde različnih "barv", tipov in kemijskih sestav. Intenziteta črt v spektru je v osnovi odvisna od stopnje ionizacije elementov in prisotnosti različnih ionov in atomov v zvezdni atmosferi. Na osnovi tega zvezde klasificiramo v različne razrede. Prvi je tako klasifikacijo opravil Secchi in zvezde razdelil v pet skupin. Modernejšo klasifikacijo pa je opravil Henry Draper. Zvezde so tako razdeljene v sedem osnovnih razredov in štiri podrazrede (ki so ostanki zgodovinskega razvoja spektralne klasifikacije), znotraj katerih razdelimo zvezde še glede na intenziteto posameznih črt od 0 do 9.

#### Osnovni razredi

- O** Vroče zvezde z izrazitim UV kontinuumom. Pričakujemo lahko, da bomo našli zgolj absorpcijske črte zelo ioniziranega helija  $HeII$ . Nastopa tudi nevtralni vodik in helij, toda črte so bolj šibke.  $T_{ef} \gtrsim 25.000 \text{ K}$
- B** Vodikove črte so močnejše kot pri razredu O; nevtralni helij je najmočnejši v B2, izgine pa v B9;  $HeII$  izgine že po razredu B0; običajno so vidne tudi črte ioniziranega kisika, magnezija in silicija (Rigel, Spika).  $12.000 \lesssim T_{ef} \lesssim 30.000 \text{ K}$
- A** Pri A0 je Balmerjeva serija vodika najmočnejša. Ta je prevladujoča v spektru. Črte kalija  $K$  in kalcija  $CaII$  postajajo vidnejše skozi razred (Sirij, Vega).  $7.500 \lesssim T_{ef} \lesssim 11.000 \text{ K}$



- F** Vodikove črte slabijo, črte  $K$ ,  $CaII$  in ostalih kovin se ojačajo (Prokarion, Kanop).  $6.000 \lesssim T_{ef} \lesssim 7.500 K$
- G** Tako imenovani sončev ali solarni tip, pri katerem  $H$  črte še slabijo;  $K$  je zelo močen; veliko je število črt nevtralnih kovin. Tu je pomembna  $G$  vez, ki jo sestavljajo ogljikovodiki  $CH$  in železove  $Fe$  črte. Pri tipu  $G0$  je  $CaI$  422.6 enako močan  $H\delta$  - četrta črta Balmerjeve serije vodika (Sonce, Kapela).  $5.000 \lesssim T_{ef} \lesssim 6.000$
- K** Nevtralne kovine so vse bolj močne, s  $H$  črtami, ki prehajajo v nerazpoznavnost; ojačajo se tudi črte  $CH$  (Arktur, Aldebaran).  $3.500 \lesssim T_{ef} \lesssim 6.000 K$
- M** Značilnost so črte Titanovega oksida  $TiO$ , ki so prevladujoče črte poleg močnih nevtralnih črt kovinskih elementov. Intenziteta teh črt se večja skozi razred - Secchijeva skupina III (Antar, Betelgeza)  $T_{ef} \lesssim 3.500 K$

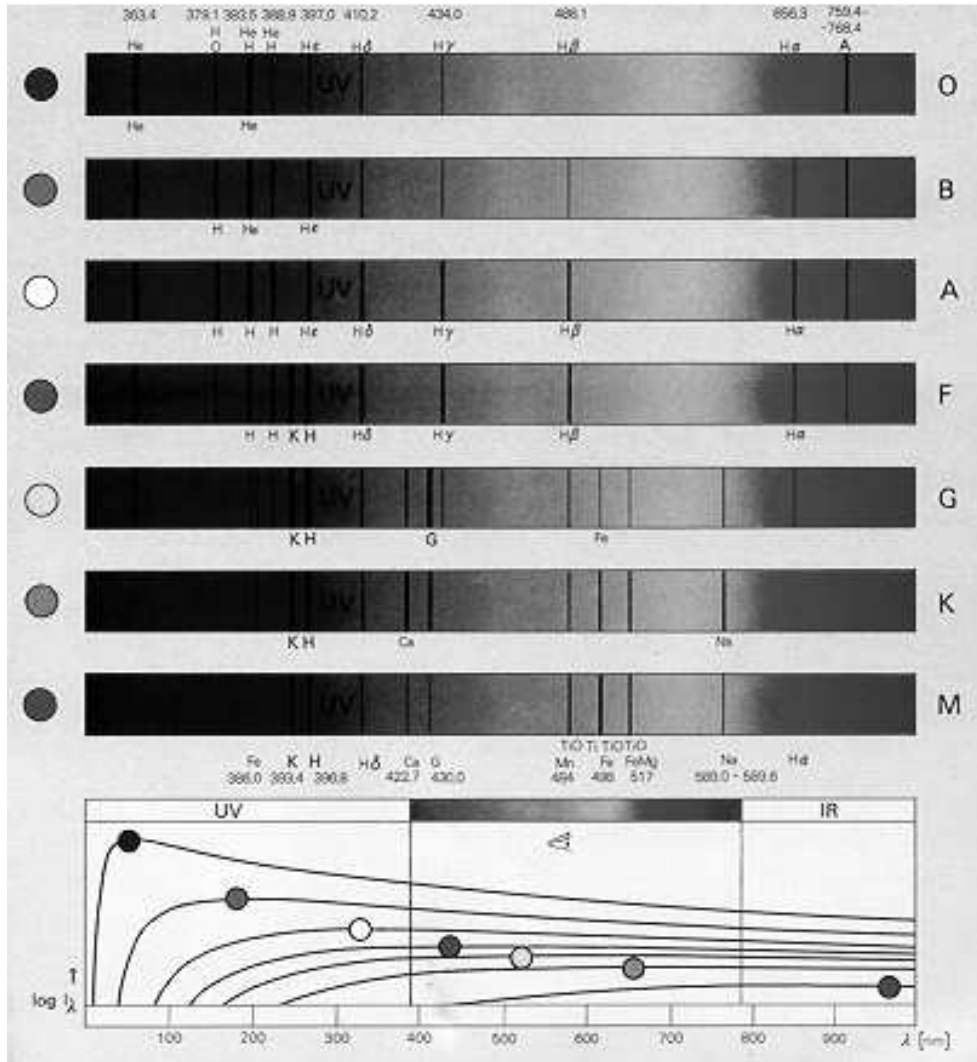
## Podrazredi

- W** Wolf-Rayet zvezde so karakterizirane s svetlimi in širšimi črtami vodika in helija. Vidne pa so tudi ogljikove, kisikove in dušikove črte. Te zvezde naj bi obstajale v dvojnih sistemih, kjer spremljevalka sleče ovojnico W.-R. zvezde, tako vidimo neposredno notranjost zvezde.
- R** Vmesni razred med  $G$  in  $N$ . To so ogljikove zvezde z obiljem ogljika in kisika (količina teh dveh elementov je 4 do 5 krat višja kot pri normalnih zvezdah).
- N** Ogljikove sestavine so značilnost tega razreda - Secchijeva skupina IV. Skupina je zelo podobna skupini  $R$ , le površina zvezd je hladnejša.
- S** Karakteristične so črte cirkonijevega oksida v povezavi s titanovim oksidom, vsebujejo pa tudi tipično težje kemijske elemente (barij, cirkonij) kot ostale zvezde. Zvezde tega tipa so največkrat spremenljivke.

Osnovne razrede si najlažje zapomnimo po začetnih črkah angleškega stavka; **O B e A F i n e G i r l, K i s s M e!** Podrazrede pa po vprašanju; **W h y? R i g h t N o w S w e e t h a r t?**

Toda orjakinja ima nižjo atmosfersko gostoto kot bela pritlikavka, a kljub temu nekako višjo stopnjo ionizacije. Zato zaporedje teh spektralnih tipov, običajno še dodatno popravimo z dodanimi izsevnostni razredi od I do V. Izsevnostni razredi so I (nadorjakinje), II (svetle orjakinje), III (orjakinje), IV (podorjakinje) in V (glavna veja).

In kaj se še lahko naučimo iz študija intenzitet spektralnih črt? Osnovni koncept je ta: šibke črte in krila močnih črt nastanejo globoko v zvezdni atmosferi, močne črte, posebno ozke središčne črte pa visoko v zvezdni atmosferi. Šibke črte pomenijo šibko absorpcijo in predstavljajo majhno neprosojnost zvezdne atmosfere, zato lahko vidimo globoko v zvezdno atmosfero. Po drugi strani pa močne črte pomenijo visoko absorpcijo in veliko neprosojnost.



Slika 1.1: Grafični prikaz spektrov, ki pripadajo posameznemu spektralnemu tipu z najbolj značilnimi spektralnimi črtami. (zgoraj) Prikaz območji v katerem ta spektralni tip najbolj seva. (spodaj)

V večini zvezd so zgornje plasti atmosfere hladnejše kot nižje plasti; zato je sevalna intenziteta tam nižja in središča absorpcijskih črt postanejo ozka in globoka.

Zvezdne strukture pa lahko imajo spektralne črte tudi razširjene ali premaknjene. Črte imajo neko naravno širino, lahko pa so tudi dopplersko razširjene, kar je posledica termičnega ali turbulentnega gibanja atomov ali pa medsebojnih trkov. Premiki črt lahko nastanejo zaradi rotacijskega ali relativističnega premika. Toda več o tem bomo povedali v zadnjem poglavju te skripte.

## 1.2 HR diagram in razvoj zvezd

V vsakem fotometričnem sistemu sta absolutna magnituda ( $M$ ) in barvni indeks ( $U, B, V$ ) odvisna od oddaljenosti zvezde (razen za efekte medzvezdne absorpcije) in lastnosti snovi zvezde. Na ta način lahko za neko skupino zvezd sestavimo diagram barva-magnituda, tako da uporabljamo magnitudo in barvo kot koordinati. Lahko pa tudi sestavimo diagram barva-barva oz. dvobarvni diagram z nanašanjem npr.  $U - B$  na eno os, na drugo pa  $B - V$ , za neko skupino zvezd. Vsi ti diagrami so različne verzije *Hertzsprung-Russellovega diagrama*, ki je en od osnovnih sistemizacij astrofizike. Najbolj pogosta inačica HR diagrama je tista, v kateri nanašamo v sistem absolutno magnitudo po spektralnem tipu, (ki je delno merjen z zvezdno površinsko temperaturo).

Za izračun absolutne magnitude potrebujemo oddaljenosti do zvezd, ki jih dobimo iz izmerjenih paralaks, ki v preteklosti niso bile ravno natančne, toda danes so boljše - satelit Hipparcos. Absolutne magnitudo izračunamo iz zveze

$$m - M = 5 \log_{10} r - 5 ,$$

kjer je  $m$  navidezna magnituda in  $M$  absolutna (prava) magnituda. Če imamo podano absolutno magnitudo  $M$ , lahko izračunamo izsev  $L$  zvezde, ki je povezan s (površinsko) temperaturo zvezde  $T_{ef}$  in polmerom zvezde  $R$ . Zapisano v fizikalni obliki;

$$M = 2.5 \log L + konst. , \quad (1.1)$$

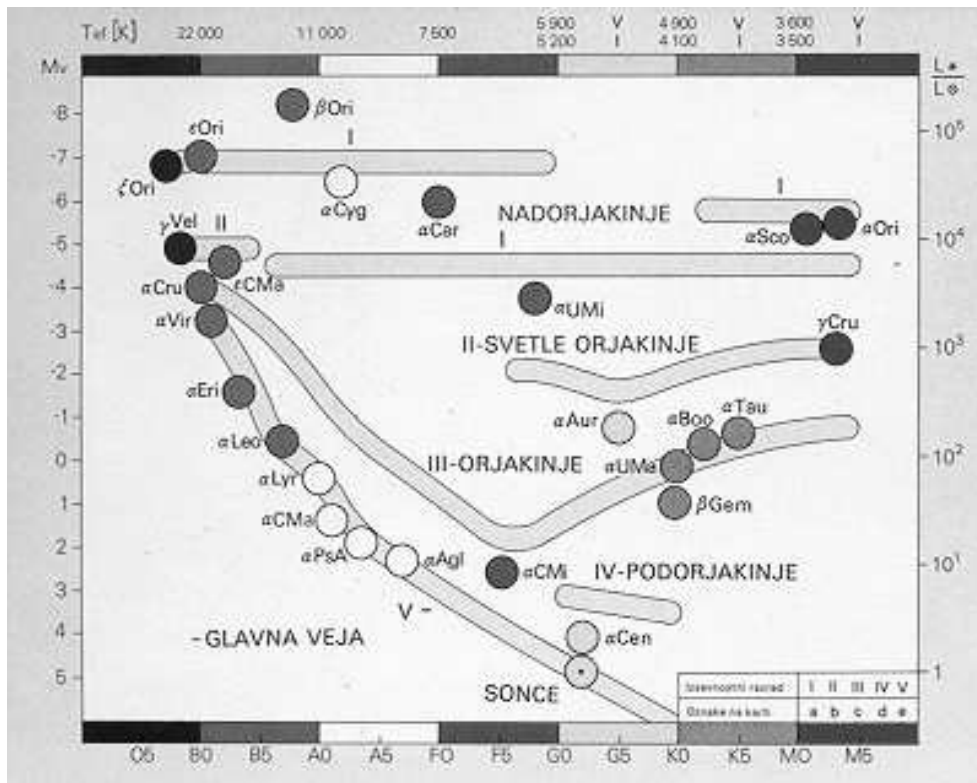
$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 , \quad (1.2)$$

kjer je druga enačba posledica Stefan-Boltzmannovega zakona, ki kaže na primeren približek sevanja črnega telesa. Iz naših novih enačb lahko HR diagram znova zapišemo npr. kot izsev  $L/L_{\odot}$  v odvisnosti od temperature  $T_{ef}$ .

Če nanesimo izmerjene zvezde v HR diagram, dobimo sliko, v kateri se na nekaterih delih nakopiči več zvezd. Največji in gostejši tak del je tako imenovana *glavna veja*, ki se razteza od zgornje leve (območje vročih svetlih zvezd) do desne spodaj

---

<sup>2</sup>Z  $U, B, V$  označujemo navidezne magnitudo opazovane z vsakim od svetlobnih filtro;  $U$  - predstavlja ultravijolično sv. 300-400 nm,  $B$  - modro 350-550 nm in  $V$  - vidno 480-650 nm.



Slika 1.2: HR diagram, ki prikazuje odvisnost spektralnih razredov od absolutne magnitude. V diagramu so prikazani različni tipi zvezd in izsevni razredi.

(območje hladnih šibkih zvezd). Tu so zvezde katerih primarni izvor energije je jedrska fuzija vodika v jedru zvezde v helij. Največ zvezd se nahaja prav na tej veji, ker je jedrskega goriva (vodika) v zvezdi največ in dokler se to gorivo ne potroši, je razvoj za zvezde na glavni veji kvazistatičen.

Druga večja skupina so *rdeče orjakinje* na zgornji desni strani digrama v območju svetlih hladnih zvezd. V teh zvezdah se je gorivo v jedru že izčrpalo in zvezda se je razvila v zapleteno (nehomogeno) strukturo. Te zvezde imajo tako relativno manj jedrskega goriva v primerjavi z zalogo, ki so jo imele na glavni veji.

Ti dve skupini nista edini veliki skupini v HR diagramu, poznamo namreč tudi *bele pritlikavke*, ki jih je zaradi njihovega majhnega izseva in polmera težko odkriti. Najdemo pa tudi manjše skupine bolj eksotičnih zvezd, kot so *nadorjakinje*, *podorjakinje* in *podpritlikavke*.

Kako to pojasnimo? To pojasnimo s predpostavko, da se zvezde nahajajo v različnih stopnjah ali takoimenovanih fazah razvoja zvezde. Vsaki fazi ustreza določen položaj v HR diagramu. V zelo grobem se razvoj zvezde lahko opiše na naslednji način:

- I To je faza gravitacijskega krčenja zvezde: Rojstvo zvezde z gravitacijskim krčenjem razredčenega in hladnega medzvezdnega plina ter praha (v katerem v 99% prevladuje vodik), pri čemer se temperatura dvigne do  $\sim 10^7$  stopinj in sproži jedrsko reakcijo - fuzijo vodika. Zvezda zato preide v termodinamično ravnovesje in s tem sestopi na glavno vejo.
- II Faza glavne veje: Časovno je to najdaljša faza, v kateri je zvezda v stabilnem stanju termodinamičnega in hidrostatičnega ravnovesja. Celotna energija, ki jo zvezda seva iz površine na enoto časa, je enaka energiji, generirani z jedrskimi reakcijami v središču zvezde. Gravitacijski tlak na zunanjih stičiščih zvezde se uravnoteži s tlakom idealnega plina (plazme) v notranjosti. Ko pa se ves vodik iz jedra zvezde (potroši) zlije v helij, v časovnem obdobju  $\sim 10^8$  let, se gravitacijsko krčenje nadaljuje in temperatura v središču zvezde zopet naraste. Zato se "vname" tudi vodik v slojih (lupinah) vse bolj izven jedra. Naposled se zaradi nekontinuiranosti v srednji molekularski masi (v jedru helij, okoli pa večinoma vodik), prične ovojnica zvezde širiti in razpihovati. Zvezda tako pride v novo fazo razvoja.
- III Faza rdeče orjakinje: Temperatura in gostota v središču zvezde nadalje raste ( $\sim 10^8$  K), zato se v gostem jedru sprožijo reakcije fuzije helija z elementi cikla CNO (glej poglavje 4.) v težje elemente. Ko pa se helij v jedru porabi, se preostala zunanja lupina gorečega helija začne širiti iz središča in slediti lupino gorečega vodika, ki gori pri nižji temperaturi. Zvezda stopi v zadnjo, četrto fazo razvoja.

Prve tri faze razvoja zvezde so neizogibne za vsako zvezdo, zaključna četrta faza pa se razlikuje in je odvisna od mase zvezde. Večja kot je masa, hitrejši je razvoj zvezde. Na glavno vejo ne pridejo edino zvezde z maso manjšo od  $0.1 M_{\odot}$ , ki zaradi majhnega gravitacijskega tlaka ne uspejo pognati jedrskih reakcij fuzije vodika.) Četrta faza in konec razvoja je odvisen od mase zvezde.

- IV a) Če je masa manjša od  $\sim 1.2 M_{\odot}$  (Chandrasekharjeve mase): gravitacijsko krčenje ne more zagotoviti dovolj visoke temperature, zato se spajanje v težje elemente v tej fazi zaustavi. Doseže se ravnotežje med gravitacijskim tlakom in tlakom ohlajenega, popolno degeneriranega elektronskega fermijevega plina velikih gostot. Zvezda konča svoj razvoj kot *belá pritlikavka*. (Podobna usoda čaka Sonce.)
- b) Če je masa zvezde med  $1.2 M_{\odot} < M < 1.6 M_{\odot}$ : postanejo gostote, pridobljene z gravitacijskim krčenjem, dovolj velike, da se prične nevtronizacija snovi, tj. do tedaj ustvarjenih elementov skupine *Fe*, v procesih  $p + e^{-} \rightarrow n + \nu$ . Tlak degeneriranega nevtronskega plina se uravnesi z znatno večjim gravitacijskim tlakom in rezultat so velike gostote takih *nevtronskih zvezd*, reda velikosti  $10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Ker je masa take zvezde večja od mase v začetnem stanju ( $m_n > m_p$ ), pomeni, da je energijo za njen nastanek omogočila gravitacija.
- c) Če je  $M \geq 1.6 M_{\odot}$ : v končnem stanju, gravitacijsko krčenje zvezde premaga vse notranje tlake in se sesede. Radij take zvezde je enak radiju Schwarzschildove sfere in zvezda je postala *črna luknja*. (glej poglavje 6.)
- d) V nekaterih primerih, ko je masa zvezde dovolj velika, se po gorenju *He* in nadaljnjem gravitacijskem krčenju z dvigom temperature nadaljuje eksotermna sinteza vse do elementov skupine *Fe*. Nadaljnje gravitacijsko krčenje pripelje do izrednega segrevanja (reda  $10^{10} \text{ K}$ ) zvezde in mogoče postanejo tudi endotermne reakcije, v katerih se sprošča veliko delcev kot so  $\alpha$ ,  $p$  in  $n$ . Ti pa lahko nadalje formirajo še težje elemente. Vsi ti procesi energijo trošijo in ne sproščajo, zato notranji tlak hitro pada (to so zelo hitri procesi). Zunanji gravitacijski tlak pa povzroči implozijo, ki znova hitro segreje notranjost, in nadalje eksplozijo. Pri tem pojavu, imenovanem *eksplozija supernove*, se sprosti izjemno veliko energije. Izvršeni material supernove vsebuje veliko težkih elementov, ki na tak način pridejo v medzvezdni prostor. Iz tega materiala se lahko rodijo nove zvezde. Istočasno to pomeni, da težki izotopi niso nastali ob Velikem poku, ampak tekom razvoja zvezde. Supernova za seboj ne pusti vedno samo snovi, ki je predstavljalá ovojnico zvezde, ampak tudi *nevtronske zvezde* (znane kot pulzarji).

Več o končnih fazah razvoja zvezd pa bomo izvedeli v poglavju 6.

## Poglavje 2

# Enačbe zvezdne strukture

### 2.1 Mehansko in toplotno ravnovesje

Ogledali si bomo stanje snovi v zvezdah. Večina zvezd (kot n.pr. naše Sonce) je velika masa plina, v kateri so temperature dokaj visoke. Zato potekajo v notranjosti jedrske reakcije, ki vzdržujejo skoraj stacionarno stanje. Pri večini zvezd so spremembe v izsevu izredno majhne. Na Zemlji so odkrili fosile alg, ki so stari okrog 1 milijardo let. Take alge ne bi mogle obstajati, če bi se temperatura takrat razlikovala od sedanje za več kot  $20^{\circ}\text{C}$ . Ta stacionarnost je še posebej presenetljiva, če vemo, da vesolje verjetno ni starejše od 20 milijard let. Vidimo, da lahko stanje zvezd v precej dolgi dobi njihovega življenja obravnavamo kot stacionarno. Zato je smiselno začeti študij zvezd s študijem stacionarnega stanja. Razen očitne pomembnosti tega stanja zvezde pa opravičuje tako odločitev kot dejstvo, da je matematično mnogo preprosteje obravnavati stacionarno stanje kot časovno odvisne pojave. Ponavadi si privoščimo še eno poenostavitev in sicer zanemarimo vrtenje zvezde. To opravičimo z argumentom, da je centrifugalni pospešek zaradi vrtenja pogosto precej manjši od pospeška zaradi gravitacije.

Nevrteča zvezda je v stacionarnem stanju gotovo krogelno simetrična, kar pomeni, da so vse količine v zvezdi odvisne samo od oddaljenosti od središča ( $r$ ). Takoj lahko zapišemo dva ravnovesna pogoja:

- (1) V mehanskem ravnovesju je tlak v zvezdi hidrostatski tlak in zato velja:

$$dp = -\rho(r)g(r)dr,$$

kjer je  $r$  radialna koordinata, ki jo merimo iz središča zvezde,  $g(r)$  pa je pospešek prostega pada pri  $r$ . Iz Newtonovega gravitacijskega zakona sledi:

$$g(r) = GM(r)/r^2,$$

kjer je

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'. \quad (2.1)$$

Pogoj za mehansko ravnovesje je torej:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2.2)$$

- (2) Energijski zakon pove za stacionarno stanje tole: tok energije  $L(r + dr)$ , ki odhaja skozi lupino z polmerom  $r + dr$  je enak toku  $L(r)$ , ki prihaja skozi lupino s polmerom  $r$  in energiji, ki se proizvede na enoto časa v prostornini med lupinama. Torej:

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon(r)\rho(r)4\pi r^2$$

oziroma

$$L(r) = \int_0^r \varepsilon(r')\rho(r')4\pi r'^2 dr', \quad (2.3)$$

kjer je  $\varepsilon(r)$  energija (jedrska energija), ki se proizvede na enoto mase in časa pri pogojih, ki vladajo na razdalji  $r$  od središča zvezde.

Prepišimo enašbe (2.1), (2.2) in (2.3) v kanonično obliko; tako da bodo predstavljale sistem diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.1')$$

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon(r)\rho(r)4\pi r^2 \quad (2.3')$$

Jasno je, da imamo samo tri enačbe za štiri neznane količine  $p$ ,  $M$ ,  $L$  in  $\rho$  - naš sistem je še nepopoln. Spomnimo se, da obstaja v snovi zveza med tlakom in gostoto - za pline je to plinska enačba. To zvezo moramo vključiti med enačbe zvezdne strukture. Plinska enačba pa vsebuje temperaturo kot novo neznanko, zato potrebujemo še eno enačbo, da zaključimo sistem diferencialnih enačb. Manjkajoča enačba je seveda tista, ki opisuje prevajanje toplote; iz vsakdanje izkušnje vemo, da je toplotni tok sorazmeren temperaturnemu gradientu in površini ploskve, skozi katero tok teče. Zakon za prevajanje toplote tako povezuje same že prej definirane količine in s tem zaključi sistem diferencialnih enačb. Še preden se lotimo zapisovanja vseh enačb, se je vredno ustaviti pri pogojih hidrostatičnega in toplotnega ravnovesja. Iz njih bomo dobili tipične vrednosti za tlak, gostoto energijske proizvodnje in za temperaturo v zvezdah kot je Sonce, kar nam bo dalo koristno informacijo o tem, s kakšne vrste plina



imamo opravka v zvezdah.

Če bi bila zvezda narejena iz nestisljive snovi, bi bila gostota povsod enaka (npr.  $\rho_0$ ) in enačbi (2.1') in (2.2') bi dali potek tlaka v zvezdi. Iz (2.2') dobimo

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \quad (2.1p)$$

Ko to vstavimo v (2.1') pa:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0^2 r \quad (2.2p)$$

Integral gornjega izraza da potek tlaka v "nestisljivi" zvezdi:

$$p(r) = p_0 - \frac{4\pi}{6}G\rho_0^2 r^2. \quad (2.4)$$

V središču pri  $r = 0$  je tlak  $p_0$ , na površini zvezde ( $r = R$ ) pa mora biti tlak enak 0. Zato je centralni tlak takole odvisen od gostote  $\rho_0$  in polmera zvezde ( $R$ ):

$$p_0 = \frac{4\pi}{6}G\rho_0^2 R^2 \quad (2.5)$$

Če upoštevamo, da je masa zvezde

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 \quad (2.6)$$

lahko izrazimo centralni tlak  $p_0$  z maso in polmerom nestisljive zvezde takole:

$$p_0 = \frac{3}{8\pi}G\frac{M^2}{R^4} \quad (2.7)$$

Tako dobljena zveza med centralnim tlakom, maso in polmerom zvezde je bolj splošna kot nakazuje naša preprosta izpeljava. Upravičeno lahko pričakujemo, da velja podobna zveza tudi za zvezde, ki so sestavljene iz stisljive snovi, le da moramo namesto polmera  $R$  vstaviti "efektivni polmer", ki je v splošnem manjši od dejanskega polmera zvezde  $R^*$ .<sup>1</sup> Na osnovi te ocene sklepamo, da je tlak v središču Sonca ( $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} kg$ ,  $R_\odot = 7 \cdot 10^8 m$ ) vsaj:

$$p_\odot \approx 3 \cdot 10^{14} N/m^2 \quad (2.7p)$$

V podobnem nonšalantnem slogu lahko ocenimo tudi temperaturo v središču zvezde, če privzamemo, da je sestavljena iz idealnega plina, katerega delci imajo povprečno maso  $\bar{\mu}$ . Za ta plin velja plinska enačba v obliki:

$$p = \frac{\rho}{\bar{\mu}}kT, \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>Da je tlak v središču stisljive zvezde večji od tlaka v središču enako velike in enako masivne zvezde, vidimo takole: V stisljivi zvezdi mora gostota naraščati z globino, zato se nahaja npr. polovica mase vse zvezde v krogli z manjšim polmerom kot pri nestisljivi zvezdi. Polovica vse mase je torej bližje središču kot pri nestisljivi zvezdi in zato je teža zunanje polovice mase zvezde v povprečju večja kot teža iste mase pri nestisljivi zvezdi.

zato je temperatura v središču:

$$kT_0 = \frac{\bar{\mu}p_0}{\rho_c} \quad (2.8')$$

pri čemer je  $\rho_c$  gostota v središču zvezde, ki je seveda večja od povprečne gostote  $\rho_0$ .

Oceno za temperaturo v središču zvezde dobimo, če delimo (2.7) s povprečno gostoto  $\rho_0$  - taka ocena ni slabša od ocene za tlak, saj smo pokazali, da je (2.7) prenizka ocena za tlak v središču, (2.6) pa da prenizko oceno za gostoto v središču. Ocena za centralno temperaturo je torej:

$$kT_0 = \frac{\bar{\mu} \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}}{\frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}} = \frac{1}{2} G \frac{M \bar{\mu}}{R}. \quad (2.9)$$

Spektroskopske analize so pokazale, da je Sonce v glavnem sestavljeno iz vodika, ki je v notranjosti povsem ioniziran, zato je povprečna masa  $\bar{\mu}$  v Soncu približno  $(m_p + m_e)/2 \equiv m_p/2$  (masa protona  $m_p = 1.6 \cdot 10^{-27} kg$ , masa elektrona  $m_e$  pa je približno 2000 krat manjša od mase protona). Tako dobimo oceno za temperaturo v središču Sonca:

$$T_{\odot} \approx 10^7 K \quad (2.9p)$$

Oceni za tlak in temperaturo v središču zvezde smo dobili na osnovi nepopolnih podatkov, zato se moramo zavedati, da so to le zelo grobe ocene, ki so možne le zato, ker so tlak, temperatura in gostota monotono padajoče funkcije oddaljenosti od središča. Posebej zanimiva je ocena za središčno temperaturo (2.9), ki pravi, da je povprečna termična energija delca v središču enaka polovici potencialne energije istega delca na površju Sonca. V naslednjih poglavjih bomo pokazali, da je ta rezultat bolj natančen kot bi lahko sklepali iz naše grobe ocene in igra pomembno vlogo pri stabilnosti zvezd.

## 2.2 Relaksacijski časi

V začetku prejšnjega poglavja smo trdili, da lahko obravnavamo večino zvezd kot veliko maso plina v stacionarnem stanju, tako da so vse količine, ki opisujejo stanje plina približno od časa neodvisne. Tak privzetek je seveda točen le v okviru neke omejene natančnosti, zato si bomo sedaj ogledali, na katerih časovnih skalah se lahko stacionarnost poruši. Obravnavali bomo tri časovne skale, ki jih bomo imenovali nuklearni, dinamični in termični relaksacijski čas.

Ker so vse zvezde vroče, izgubljajo energijo v prostor. To energijo mora nadomestiti njihov notranji izvor. Danes vemo, da so to jedrske reakcije, predvsem zlivanje vodika v helij. Čas trajanja jedrskih zalog imenujemo NUKLEARNI RELAKSACIJSKI ČAS ( $t_N$ ). Tega prav lahko izračunamo, če poznamo energijsko zalogo zvezde (energijo, ki jo lahko vse gorivo proizvede) in moč ( $L$ ), ki jo zvezda seva (izsev). Iz pogoja za toplotno ravnovesje (2.3) izračunamo najprej povprečno energijo, ki jo odda kilogram snovi v sekundi:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{L}{M}. \quad (2.10)$$

Za Sonce, katerega izsev je  $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{26} W$ , dobimo

$$\langle \varepsilon_{\odot} \rangle \approx 2 \cdot 10^{-4} \frac{W}{kg} \quad , \quad (2.10p)$$

oziroma

$$\langle \varepsilon_{\odot} \rangle \approx 2 \cdot 10^{-18} \frac{MeV/s}{m_p}$$

V drugem koraku smo izračunali, koliko energije se sprosti v povprečju na vsak proton v notranjosti Sonca v sekundi ( $m_p$  = masa protona). Vemo, da se pri zlitju protonov v  $He$  spremeni približno 8 odstotkov mase v energijo - na vsak proton pride okrog 8 MeV vezalne energije. Tako vidimo, da je povprečna življenska doba protona v Soncu, oziroma NUKLEARNI RELAKSACIJSKI ČAS:

$$t_N = \frac{E_N}{L} = \frac{E_N}{M} \frac{M}{L} = \frac{E_N}{M} \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \quad (2.11)$$

Pri tem je  $E_N$  zaloga energije, ki jo lahko proizvedejo jedrske reakcije. Če bi vzeli, da je Sonce sestavljeno iz samega vodika in je zmožno pretvoriti ves vodik v helij, bi dobili za nuklearni čas pretvorbe vodika v helij za Sonce (glej (2.10p))  $\approx 10^{11}$  let. Kasneje bomo videli, da je Sonce zmožno pretvoriti le okrog 10 odstotkov vodika v helij, zato računamo, da je pravi nuklearni relaksacijski čas okrog 10 krat krajši, to je:

$$t_{N\odot} \approx 10^{10} \text{let} \quad (2.11p)$$

Sedaj nam je jasno, zakaj se temperatura Sonca ni bistveno spremenila v zadnji milijardi let!

Ta preprost račun nam je pokazal, da zvezda lahko "živi" v stacionarnem stanju zelo dolgo. Odprto pa je ostalo še vprašanje, zakaj je stacionarno stanje stabilno - zakaj npr. zvezda ne eksplodira kot vodikova bomba. Nekaj o stabilnosti tega stanja izvemo, če se vprašamo, kakšne spremembe povzročijo slučajne motnje - to je odkloni od hidrostatičnega ali od toplotnega ravnovesja.

Najprej si oglejmo primer, ko je hidrostatično ravnovesje v zvezdi porušeno, tako da se tlak in gostota v posameznih plasteh nekoliko razlikujeta od ravnovesnih vrednosti. Pričakujemo, da bodo zaradi tega plasti v zvezdi spreminjale svoje lege. Če se izkaže, da odkloni od mirovne lege ne naraščajo s časom, lahko smatramo, da je hidrostatično ravnovesje stabilno, v obratnem primeru pa seveda ni.

Zaradi preprostosti bomo obravnavali *radialne motnje*. Opazujmo krogelno plast, ki je bila v ravnovesju omejena s polmeroma  $r$  in  $r + dr$ , v motenem stanju pa naj bosta polmera mejnih plasti  $R(r, t)$  in  $R(r + dr, t)$ . V sistemu, ki se giblje skupaj s plastjo, je vsota vseh sil na plast enaka nič. Zato je v tem sistemu izpolnjen pogoj hidrostatičnega ravnovesja:

$$dp = \rho \hat{g} dR \quad , \quad (2.12)$$

kjer je  $\hat{g}$  pospešek prostega pada glede na sistem, ki se giblje s plastjo:

$$\hat{g} = G \frac{M(R)}{R^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \quad . \quad (2.13)$$

(Težo plasti v pospešenem sistemu izračunamo prav tako kot težo človeka v dvigalu, ki se pospešeno giblje). Enačba gibanja za plast je torej:

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial r} = -\rho(r, t)\{GM(R)/R^2 + \partial^2 R/\partial t^2\} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (2.14)$$

Rešiti jo hočemo za majhne odmike od stanja hidrostatičnega ravnovesja, zato vse količine razvijemo okrog tega stanja:

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_0(r) + \delta p(r, t) \\ \rho(r, t) &= \rho_0(r) + \delta \rho(r, t) \\ R(r, t) &= r[1 + \alpha(r, t)], \end{aligned} \quad (2.15)$$

kjer indeks "0" označuje stanje hidrostatičnega ravnovesja. Ker smo se domenili, da  $R(r, t)$  označuje vedno isto plast v zvezdi (za stalen  $r$ ), velja, da je  $M(R, t) = M(r)$  in zato tudi:

$$dM = \rho_0(r)4\pi r^2 dr = \rho(r, t)4\pi R^2 dR. \quad (2.16)$$

Odtod dobimo naslednjo zvezo med  $\delta \rho$  in  $\alpha$  za majhne  $\alpha$

$$\delta \rho = -\rho_0(3\alpha + r \frac{\partial \alpha}{\partial r}). \quad (2.17)$$

Tudi med spremembami tlaka in gostote velja v prvem približku linearna zveza s stisljivostjo kot sorazmernostnim koeficientom. Kasneje se bo izkazalo, da moramo uporabiti adiabatno stisljivost, ker so dinamični procesi v zvezdah mnogo hitrejši kot prenos toplote. Zato velja:

$$\frac{\delta p}{p} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (2.18)$$

kjer je  $\gamma$  razmerje specifičnih toplot ( $c_p/c_v$ ). Za idealen enoatomni plin je  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

Iz enačb (2.15) eliminiramo  $\delta p$  in  $\delta \rho$ , jih vstavimo v enačbo gibanja (2.14), upoštevamo, da  $p_0$  in  $\rho_0$  ustrezata ravnovesni enačbi (2.2) in dobimo *enačbo za majhne odmike od ravnovesne lege* v obliki:

$$\frac{GM}{r^3}(3\gamma - 4)\alpha + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho r^4} \frac{\partial}{\partial r}(r^4 p \frac{\partial \alpha}{\partial r}) = 0 \quad (2.19)$$

z robnimi pogoji  $\alpha$  je končen v izhodišču in  $\delta p = 0$  na površini zvezde. To enačbo smo navajeni reševati s separacijo spremenljivk - pišemo  $\alpha = f(r) \cdot e^{i\omega t}$  in pridemo do problema lastnih vrednosti za frekvence  $\omega$ . Dobiti hočemo najnižjo lastno frekvenco - to je najdaljši čas s katerim zvezda niha ali se seseda. Če vstavimo  $GM/r^3 \approx \frac{4\pi}{3}G < \rho >$ , kjer je  $< \rho >$  neka povprečna gostota, sta v enačbi (2.19) prva dva člena neodvisna od koordinate  $r$  in rešitev te enačbe, ki da dobro oceno za iskano najnižjo lastno frekvenco, je

$$\alpha = A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.20)$$

kjer je  $\omega_0 = [\frac{4\pi}{3}G < \rho > (3\gamma - 4)]^{\frac{1}{2}}$ . Če je  $(3\gamma - 4) > 0$ , je rešitev oscilirajoča, kar pomeni, da zvezda, ki je bila nekoč zmotena, radialno niha, amplituda nihanj pa s časom ne narašča. Bolj natančen model pokaže, da izgube energije zaradi prevajanja toplote v zvezdi, nihanje počasi uduše (podobno kot pri zvoku v zraku). Vsaka motnja, ki nastane kjerkoli v zvezdi, se najkasneje v eni periodi tega osnovnega lastnega nihanja razširi po vsej zvezdi. Periodo tega nihanja imenujemo zato DINAMIČNI RELAKSACIJSKI ČAS in je:

$$t_d = [\frac{G}{3\pi} < \rho > (3\gamma - 4)]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Normalne zvezde, katerih notranjost je sestavljena iz idealnega plina, se res tako obnašajo, ker je adiabatski indeks  $\gamma$  za idealni enoatomni plin enak  $5/3$  in je torej  $3\gamma - 4 = 1$ , kar je pozitivno.

Za Sonce, dobimo dinamični relaksacijski čas

$$t_{d\odot} \approx 1^h \quad (2.21p)$$

To je zelo kratek čas, kar pomeni, da se vsaka dinamična nestabilnost, ki bi bila morda posledica eksplozivnega sproščanja energije, razširi po celotnem Soncu v eni uri. Velikih nihanj s tako karakteristično frekvenco na Soncu ne opazimo, kar govori v prid domnevi, da je Sonce dinamično stabilno. V zadnjem času pa so razvili zelo natančne metode za merjenje hitrosti Sončeve površine in ugotovili, da turbulenca (vrenje), ki teče v vrhnjih plasteh Sonca, vzbuja osnovno radialno pa tudi druga možna nihanja. Amplitude teh nihanj so na Soncu le nekaj metrov v sekundi, tako da jih je težko zaznati. Frekvenčni spektri različnih načinov nihanj nudijo zelo učinkovito metodo za določanje notranje strukture Sonca (potek  $p(r)$  in  $\rho(r)$ ), kot lahko ugotovimo iz enačbe (2.19).

Zanimivo je, da so časi tega velikostnega reda značilni za kefeide. Odtod namig, da gre za zvezde, ki radialno nihajo. Da gre v resnici za radialno nihanje so potrdili s tem, da so merili in izmerili periodične premike v spektrih teh zvezd, ki nihajo v fazi z nihanjem sija. Ti spektralni premiki odražajo včasih precej velika radialna nihanja spremenljivk. Nihanje spremenljivk se začne pri nekaterih zvezdah še preden dosežejo hidrostatično ravnovesje. Ko bi pogoji ravnovesja lahko bili izpolnjeni, pa še vedno odmeva začetni val, ki je krčenje ustavil. Krčenje pogosto odmeva nekaj milijonov let, ker nadomeščajo izgube pri nihanju mehanizmi, ki jih v tem računu ne moremo pojasniti. Na podoben način se vzbude in nihajo tudi nekatere zvezde, ko se postarajo in napihnejo na več desetkratni prvotni polmer.

Še dve pripombi sta na mestu ob enačbi (2.19). Pričakujemo, da pravilno opisuje razširjanje zvočnih valov v radialni smeri. Da je temu tako vidimo, če opazimo, da je tipična valovna dolžina zvočnih valov ( $\lambda$ ) veliko krajša od polmera zvezde. Tako je

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\rho r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 p \frac{\partial \alpha}{\partial r}) = \\ & = \frac{\gamma}{\rho r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 p) \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \approx \end{aligned}$$

$$\approx i \frac{n}{R} \frac{\gamma p}{\rho} \frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{(2\pi)^2\alpha}{\lambda^2}$$

V zadnji vrstici smo upoštevali, da je za kratke zvočne valove mogoče zapisati  $\alpha$  vsaj lokalno kot  $A \cdot e^{i(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})}$ . Tlak in radialna koordinata  $r$  se spreminjata na velikostni skali celotne zvezde, zato smo v prvem členu tretje vrstice nadomestili  $\frac{\partial}{\partial r}$  z  $\frac{n}{R}$ , pri čemer je  $n$  število, ki je velikostnega reda 1. Kadar je  $\lambda \ll R$ , lahko prvi člen v gornji enačbi zanemarimo in prav tako lahko zanemarimo prvi člen v enačbi (19), tako da se ta tedaj glasi:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \gamma \frac{p}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} = 0.$$

To je znana valovna enačba iz katere preberemo hitrost zvoka ( $c_s$ ):

$$c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

V tej luči lahko izpeljemo dinamični relaksacijski čas še drugače; to je čas, ki ga potrebuje zvok, da prepotuje polmer zvezde. S takim sklepanjem pridemo do naslednje ocene za dinamični relaksacijski čas:

$$t_d \approx R / \langle c_s \rangle = R \cdot \left\langle \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{p}} \right\rangle = R \cdot \left\langle \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\mu}}{kT}} \right\rangle \quad (2.22)$$

V zadnjem sklepu smo upoštevali enačbo stanja idealnega plina (2.8). Upoštevajmo še izraz za povprečno temperaturo zvezde, ki smo ga izpeljali v (2.9), pa dobimo:

$$t_d \approx R \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{R}{GM}} = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{R^3}{GM}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi}{3} \gamma G \rho}} \quad (2.23)$$

Tako dobljeni izraz je skoraj identičen z bolj točno rešitvijo (2.21) - razlika je samo v sorazmernostnem faktorju.

Drugi komentar v zvezi z enačbo (2.19) se tiče ravno omenjene razlike v sorazmernostnem faktorju. Če je adiabatski indeks  $\gamma$  večji od  $\frac{4}{3}$ , je razlika med (2.21) in (2.23) le kvantitativna in razmeroma majhna. Če pa je  $\gamma \leq \frac{4}{3}$ , je razlika med (2.21) in (2.23) kvalitativna - (2.23) izraz je napačen, če ga razumemo v tem smislu, da ima  $t_d$  kakšno zvezo z nihanjem zvezde. Če je  $\gamma < \frac{4}{3}$ , se v enačbi (2.19) spremeni predznak prvega člena in njene rešitve niso več nihajoči sinusi in cosinusi, pač pa v neskončnost rastoče in proti nič padajoče eksponentne funkcije. Zvezda v kateri bi bil adiabatski indeks  $\gamma \leq \frac{4}{3}$  ne bi bila stabilna, ampak bi se bodisi neomejeno širila v prostor ali pa neomejeno krčila proti manjšim in manjšim velikostim. Pri "normalnih" zvezdah, ki jih sestavlja idealni enoatomni plin, do nestabilnosti ne pride. V zelo zgodnjih fazah pri nastajanju zvezde, ko večina plina še ni ionizirana, pa lahko pride do položaja, ko je efektivni adiabatski indeks v zvezdi začasno manjši od  $\frac{4}{3}$ . Prav tako lahko pride do nestabilnosti v poslednjih fazah v življenju zvezde, ko postanejo notranje gostote tako velikanske, da so lastnosti snovi, ki sestavlja zvezdo, bistveno drugačne od lastnosti

idealnega plina. Kasneje bomo pokazali, da pogoj  $\gamma \geq \frac{4}{3}$  določa tako največjo možno maso zvezde nasploh, kot tudi največjo možno maso za ugaslo zvezdo, to je za belo pritlikavko ali nevtronsko zvezdo.

Do sedaj je bilo govora o dveh relaksacijskih časih - o nuklearnem in dinamičnem; prvi je povedal koliko časa je potrebno, da spoznamo izgubo notranjega jedrskega energijskega rezervoarja, drugi pa je povedal v kolikšnem času spoznamo izgubo hidrostatičnega ravnovesja v zvezdi. Razmisliti moramo še o tem, kaj in kako hitro bi se zgodilo, v če bi se iz kateregakoli razloga porušilo toplotno ravnovesje v zvezdi, to je, kaj bi se zgodilo, če bi npr. jedrske reakcije nenadoma prenehale z nadomeščanjem energije, ki jo zvezda seva. V ta namen si oglejmo energijske rezervoarje s katerimi zvezda razpolaga. Razen že omenjenega rezervoarja *jedrske* energije, sta v zvezdi še z dvema pomembna rezervoarja: to sta rezervoar *toplotne* in *gravitacijske* energije. Začnimo z gravitacijsko energijo! Vzemimo, da moremo zvezdo graditi po lupinah in jo imamo že zgrajeno do polmera  $r$ . Ko dodamo na že zgrajeno maso  $M(r)$  iz "neskončnosti" še plast z maso  $dM$ , smo prejeli na račun gravitacijske potencialne energije delo  $G \frac{M(r)dM}{r}$ . Torej lahko rečemo, da je potencialna energija plasti enaka omenjenemu delu z negativnim predznakom, celotna *gravitacijska potencialna energija* zvezde pa je vsota takih prispevkov. Torej:

$$E_g = - \int_0^R G \frac{M(r)\rho(r)}{r} 4\pi r^2 dr \quad (2.24)$$

Če uporabimo enačbo hidrostatičnega ravnovesja (2.2), lahko gornje zapišemo tudi takole:

$$E_g = \int_0^R r \frac{dp}{dr} 4\pi r^2 dr \quad .$$

Po integraciji per partes ( $dv = \frac{dp}{dr} dr$ ,  $u = 4\pi r^3$ ) pa dobimo še:

$$E_g = -3 \int_0^R p(r) 4\pi r^2 dr \quad (2.25)$$

Gornji izraz pa lahko razumemo še drugače, če sestavlja zvezdo idealni enoatomni plin. Toplotna energija idealnega enoatomnega plina je namreč enaka vsoti vseh kinetičnih energij delcev, ki sestavljajo plin, zato je gostota kinetične, oz. toplotne energije:

$$w_T = \frac{3}{2} nkT \quad (2.26)$$

Pri tem je  $n$  število delcev na enoto prostornine. Upošteva je (2.8), lahko zapišemo gostoto toplotne energije idealnega plina še v obliki:

$$w_T = \frac{3}{2} p \quad (2.27)$$

Za zvezdo, ki jo sestavlja idealni plin je torej *toplotna energija*:

$$E_T = \int_0^R \frac{3}{2} p 4\pi r^2 dr \quad (2.28)$$

Ko primerjamo (2.28) in (2.25), pridemo do nadvse pomembnega rezultata:

$$E_T = -\frac{1}{2}E_g \quad (2.29)$$

To je eden ključnih rezultatov za razumevanje stabilnosti zvezd. Kasneje bomo namreč pokazali, da je večina stabilnih zvezd sestavljena iz snovi, katere lastnosti lahko zelo, zelo dobro opišemo z enačbo za idealni plin. Pomen tega rezultata lahko razumemo takole: Če zvezda ne bi imela jedrskega energijskega rezervoarja, bi bila njena celotna energija vsota gravitacijske in termične energije, kar zapišemo:

$$E_{cel} = E_g + E_T = -2E_T + E_T = -E_T \quad (2.30)$$

To pomeni, da ima zvezda kot celota negativno specifično toploto; če izgubi (npr. s sevanjem) energijo (celotno energijo)  $\Delta E$ , se ji termična energija po (2.30) poveča za  $\Delta E$ . To pomeni, da se zvezda, ki s sevanjem izgublja energijo, segreva. Do tega pride zato, ker se sevajoča zvezda krči in zato postaja vse bolj gravitacijsko vezana. Polovica tako sproščene energije se izseva, druga polovica pa gre v toplotno energijo; povečana toplotna energija je potrebna zato, da zvezda vzdrži povečan tlak zaradi manjše razsežnosti.

Mehanizem negativne specifične toplote tudi na preprost način pojasni zakaj je termonuklearno gorenje v zvezdi stabilno in ne eksplozivno kot npr. v vodikovi bombi. Termonuklearne reakcije so podobno kot kemijske reakcije močno odvisne od temperature in gostote - s povišano temperaturo in gostoto se njihova hitrost močno poveča. Vzemimo, da bi jedrske reakcije v notranjosti zvezde potekale hitreje, kot zahteva toplotno ravnovesje. To bi imelo za posledico povišanje celotne energije zvezde in s tem zmanjšanje toplotne energije, to je povprečne temperature, kar pomeni zmanjšanje hitrosti jedrskih reakcij. Če pa so, obratno, jedrske reakcije prepočasne, zvezda s sevanjem izgubi več energije, kot je reakcije proizvedejo. Celotna energija zvezde se tedaj zmanjša, toplotna energija se poveča, zato stečejo jedrske reakcije hitreje, dokler ne dosežejo ravnovesne hitrosti, ki jo diktirajo izključno pogoji prenosa toplote.

Sedaj lahko odgovorimo na vprašanje kaj bi se zgodilo, če bi v zvezdi jedrske reakcije nenadoma prenehale proizvajati energijo - zvezda bi se začela segrevati in krčiti. Kot smo povedali, mora v tem primeru gravitacijske energija napajati dva porabnika - polovico gre za povečanje termične energije, polovico pa v izsev. **TERMIČNI RELAKSACIJSKI ČAS** ( $t_T$ ) imenujemo tisti čas, v katerem bi zvezda pri nespremenjenem izsevu povečala svojo termično energijo na dvojno prvotno vrednost, torej:

$$t_T = \frac{E_T}{L} = \frac{-\frac{1}{2}E_g}{L}$$

Za Sonce izračunamo gravitacijsko potencialno energijo po enačbi (2.24). Ker še ne poznamo odvisnosti gostote od radija privzamemo, da je Sonce kar homogena krogla s polmerom  $R_\odot$  in ocenimo:

$$E_{g_\odot} \approx -\frac{3}{5}G\frac{M_\odot^2}{R_\odot} \approx -2 \cdot 10^{41} J$$



Po absolutni vrednosti je ta ocena nekajkrat premajhna, saj so notranje plasti Sonca gotovo precej bolj goste od zunanjih, zato je efektivni polmer Sonca glede na gravitacijo gotovo manjši. Bolj natančni računi pokažejo, da je gornja ocena premajhna (po absolutni vrednosti) za dobrih trikrat. Če to upoštevamo, lahko izračunamo, da je termični relaksacijski čas za Sonce približno:

$$t_{T\odot} = 30 \cdot 10^6 \text{let}$$

Ugotovili smo, da se v zvezdah lahko dogajajo različni procesi in vsak od njih ima svojo časovno skalo. Dinamična je zelo kratka (za Sonce  $t_d \approx 1^h$ ), termična je za človeške razmere zelo dolga  $t_T \approx 30 \cdot 10^6 \text{let}$ , nuklearna skala pa je še več stokrat daljša od termične skale. Zaradi teh velikih razlik v časovnih skalah lahko na osnovi opazovanj marsikaj sklepamo o procesih, ki v danih zvezdah dominirajo. Pri tem pa je treba vendarle poudariti, da je tako jasna delitev na različne časovne skale predvsem značilna za zvezde v stabilni fazi jedrskega gorenja kot je Sonce. V zvezdah, ki so na koncu svoje življenjske poti pa so vsi procesi bistveno hitrejši in vsi relaksacijski časi lahko postanejo primerljivi.

## 2.3 Prenos energije

Ko smo dobili oceno za notranjo temperaturo Sonca, se lahko povrnemo na vprašanje, kako se v zvezdah prevaja energija. Ker je znotraj zelo vroče, lahko kar uganemo, da igra prenos s sevanjem pomembno vlogo. Včasih, kadar so v zvezdi temperaturni gradienti še posebej veliki, prevzame vodstvo v efektivnosti prevajanja konvekcija, navadno prevajanje s trki pa je v zvezdah, razen v zelo eksotičnih fazah razvoja (bele pritlikavke, jedra rdečih velikank, nevtronske zvezde), povsem nepomembno in neučinkovito zaradi majhne gostote snovi.

### 2.3.1 Prevajanje s sevanjem

Če bi se mogli in hoteli potopiti v zvezdo <sup>2</sup>, nebi videli kaj daleč - na pogled bi bilo podobno, kot bi bili potopljeni v nekakšno svetlo meglo. Svetlobo si je najbolje predstavljati kot fotone, ki begajo povsod in v vse smeri v notranjosti zvezde. Število fotonov bežečih proti površini je le zelo malo večje od števila tistih, ki se gibljejo v nasprotni smeri. Lahko si predstavljamo, da se v vroči redki snovi, kakršna je v zvezdah, fotoni gibljejo premočrtno, dokler ne naletijo na elektron ali atom. Fotoni, ki so kvanti elektromagnetnega valovanja sodelujejo z nabitimi osnovnimi delci in sicer jih lahko elektroni sipljejo - preusmerijo v drugo smer, lahko pa elektroni v sodelovanju z atomi ali ioni preprosto vzamejo fotonu vso energijo - ga absorbirajo, po drugi strani pa lahko elektron v atomu ali elektron, ki se siplje na ionu odda del svoje energije v obliki kvanta svetlobe - fotona. V skladu s to sliko lahko povsem fenomenološko opišemo razširjanje svetlobe (fotonov) v redki snovi s pomočjo dveh

<sup>2</sup>Površinske plasti Šonca so npr. precej bolj redke od zraka, le vroče je tam.

procesov: absorpcije in emisije. Absorpcijski koeficient definiramo takole: vzemimo, da bi lahko prenesli plast snovi v natanko takem stanju <sup>3</sup> kot je v zvezdi v kiveto debeline  $d$ . Če bi z laserjem svetili skozi to plast bi drugi strani oslabljen curek. Razmerje med prepuščenim in vpadlim svetlobnim tokom je:

$$\frac{j'}{j} = e^{-\mu d} \approx (1 - \mu d) \quad ,$$

pri čemer je  $\mu$  absorpcijski koeficient. Gledano mikroskopsko, si predstavljamo pride do absorpcije iz dveh razlogov, del laserskih fotonov elektroni v sodelovanju z ioni preprosto absorbirajo, del fotonov pa pri sipanju na elektronih spremeni prvotno smer in jih ne detektiramo na mestu, kjer merimo tok prepuščene svetlobe. Če opazujemo našo kiveto z vročim plinom in ne svetimo nanjo, opazimo, da sama sveti (Maxwellov demon sproti nadomešča izsevano energijo!). Če je dovolj majhna (mere so manjše kot  $1/\mu$ ) opazimo, da sveti polovica kivete natanko s polovico moči celotne kivete. Tako lahko definiramo emisivnost  $i$  kot moč, ki jo seva (dovolj majhna) prostornina na enoto prostornine v vse smeri.

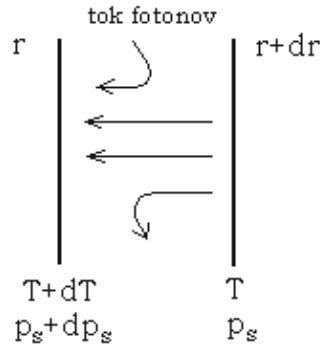
Običajno absorbcijo pa lahko opišemo tudi z *masnim absorpcijskim koeficientom*  $\kappa$ , tako da se v plasti z debelino  $dr$  absorbira delež  $\kappa\rho dr$  vpadle svetlobe. Če pride pravokotno na plast debeline  $dr$  tok  $j$ , ga pride skozi le še  $j(1 - \kappa\rho dr)$ . Absorpcijski koeficient  $\kappa$  je v splošnem odvisen od pogojev, pod katerimi se nahajajo plini v zvezdi. Več o tem koeficientu bomo povedali kasneje. Računi pokažejo da je povprečna prosta pot fotonov  $1/\kappa\rho$  v normalnih zvezdah reda velikosti  $1\text{ cm}$ . Izračunali bomo, kolikšen tok teče skozi plast debeline  $dr$ , če je razlika temperatur med površinama enaka  $dT$ . Ker je razpolovna debelina za fotone  $1/\kappa\rho$  majhna, je sevanje v vsaki točki zvezde skoraj izotropno. Zato je tudi sevalni tlak skoraj izotropen, njegova vrednost pa je  $p_S = \frac{\sigma}{3c}T^4$ .

Oglejmo si, kaj se dogaja v tanki lupini zvezdne snovi. (glej slika 2.1)

Leva stran lupine je bolj vroča od desne, zato teče od leve proti desni toplotni tok  $j$  - tok fotonov (zaradi enostavnosti obravnavamo kar planparalelno geometrijo). Ker je stanje stacionarno in se v plasti energija niti ne proizvaja niti ne izginja, mora biti ta tok isti pri vseh legah  $r$ . Vemo pa, da vsi fotoni, ki sestavljajo tok  $j$  pri legi  $r$ , zaradi sipanja svetlobe v plazmi ne morejo priti od  $r + dr$ . Zato lahko smatramo, da je tok pri  $r + dr$  sestavljen iz fotonov, ki so prišli od  $r$  - energijski tok teh fotonov je  $j\kappa\rho dr$  - in fotonov, ki so se pridružili temu toku na razdalji  $dr$  zaradi temperaturnega gradienta. Iz povedanega sledi, da mora biti energijski tok tega dela enak  $j\kappa\rho dr$ . Kolikšen je tok  $j$  za dano temperaturno razliko  $dT$  lahko izračunamo, če upoštevamo, da je plast  $dr$  v ravnovesju. Fotoni, ki se v plasti absorbirajo (njihov energijski tok je  $j\kappa\rho dr$ ), predajo plasti svojo gibalno količino in zato delujejo nanj s tlakom

$$dp_1 = \frac{d(E/c)}{dt dS} = \frac{dj}{c} = \frac{j\kappa\rho}{c} dr \quad ,$$

<sup>3</sup>Seveda bi potrebovali nevidnega Maxwellovega demončka, da bi skrbel, da se snov nebi s sevanjem ohlajala



Slika 2.1:

ki narašča v naši Sliki 2.1 od leve proti desni. Fotoni, ki se pridružijo toku v plasti, pa delujejo na plast z natanko enako velikim tlakom, ki narašča proti levi in je posledica naraščanja izotropnega sevalnega tlaka  $\frac{4\sigma}{3c}T^4(r)$ . Tako lahko na novo zapišemo

$$dp_1 = \frac{j\kappa\rho}{c}dr = dp_2 = \frac{4\sigma}{3c}dT^4(r).$$

Odtod pa dobimo končno

$$j = -\frac{4\sigma}{3\kappa\rho} \frac{d}{dr} T^4, \quad (2.31)$$

oziroma, ker je  $L = jS$ ,

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4\sigma}{3\kappa\rho} \frac{d}{dr} T^4. \quad (2.32)$$

Z zgornje enačbe (2.32) lahko grobo ocenimo izsev zvezde. Kakor smo že vajeni, nadomestimo odvod temperature z razliko temperatur v sredini in na površini, deljeno s polmerom zvezde.

$$L \approx \frac{16\pi R^2}{3 \langle \kappa \rangle \rho} \frac{\sigma T_c^4}{R} \quad (2.33)$$

Za  $T_c$  vstavimo oceno  $kT = \bar{\mu} \frac{GM}{R}$  in pridemo do izraza, da je

$$L \sim \frac{16\pi R}{3 \langle \kappa \rangle \rho} \frac{\sigma}{k^4} \bar{\mu}^4 \frac{(GM)^4}{R^4} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{4\sigma \bar{\mu}^4}{\langle \kappa \rangle k^4} G^4 M^3. \quad (2.34)$$

Veljavnost rezultata, ki smo ga dobili s tako zelo grobimi argumenti, je presenetljivo dobra. Zvezde na glavni veji so iz enake snovi in je zato  $\bar{\mu}$  isti za vse zvezde z glavne veje. Izkazuje se, da je tudi *povprečna prosojnost*  $\langle \kappa \rangle$  približno ista za vse zvezde z glavne veje. Zato zveza

$$L \propto M^3$$

dobro ponazarja odvisnost izseva od mase. Iz eksperimentalnih podatkov dobljena zveza je

$$L \simeq M^{3.3}.$$

Poudariti moramo, da je ujemanje napovedane zveze med maso in izsevom z opazovanji do neke mere le srečno naključje, kajti prevajanje s sevanjem ni vedno dominantni mehanizem za prenos toplote. Kadar bi bil potreben prevelik temperaturni gradient, da bi se prenesla zadostna količina toplote iz notranjosti na površino, se razvije v zvezdi konvekcija, ki prenaša energijo mnogo bolj učinkovito. V takih primerih moramo enačbama strukture dodati še člen, ki opisuje prevajanje s konvekcijo.

### 2.3.2 Prevajanje s konvekcijo

Konvekcijo dobro poznamo iz vsakdanjega življenja, npr. konvekcijo zraka v sobi, ki jo grejemo z radiatorjem. Ob radiatorju se zrak segreje in zato postane njegova gostota manjša kot gostota okolice. Vzgon požene topli zrak navzgor, na njegovo mesto pride hladnejši zrak, ki se zopet segreje in tako se proces ponovi.

Mehanizem konvekcije v zvezdi pa je nekoliko drugačen. Ker so energijski izvori zvezno porazdeljeni po prostornini, so mirujoči deli plina vedno v ravnovesju z okolico; ravnovesje se poruši le delu plina, ki se giblje. Zato opazujemo majhen masni element, recimo mu mehurček, ki se giblje navzgor. V vsaki točki poti se tlak v mehurčku izenači s tlakom okolice, medtem ko je izenačevanje temperature počasnejše, tako da smemo pri dovolj kratkotrajnih odsekih poti reči, da se plin v mehurčku razpenja adiabatno. Naj bo mehurček na višini  $r$  v popolnem ravnovesju z okolico. Ko ga dvignemo za  $dr$ , se tlak v njem spremeni za  $\frac{dp}{dr}dr$ , temperatura pa za

$$dT_{\text{mehurček}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)T \frac{dp}{p} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p} \frac{dp}{dr} dr. \quad (2.35)$$

Temperatura okolice je na tej višini padla za

$$dT_{\text{okolice}} = \frac{dT}{dr} dr. \quad (2.36)$$

Če je mehurček sedaj hladnejši od okolice, je tudi težji in zato se zvrne in pade nazaj. V takem primeru je plin stabilen in do konvekcije ne more priti. Če pa je mehurček na višini  $dr$  toplejši od okolice, je lažji in zato ga vzgon poganja navzgor. Plin je tedaj nestabilen in razvijejo se konvekcijski tokovi. Videli smo, da se konvekcija razvije, če je le

$$dT_{\text{mehurček}} > dT_{\text{okolice}}, \quad (2.37)$$

oziroma, če vstavimo (2.35) v (2.36)

$$\Delta \nabla T \equiv \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p} \frac{dp}{dr} - \frac{dT}{dr} > 0. \quad (2.38)$$

Količino  $\Delta\nabla T$  imenujemo superadiabatski temperaturni gradient. Naš pogoj torej pove, da nastopi konvekcija, brž ko postane superadiabatski temperaturni gradient pozitiven. Izračunati bi bilo potrebno še toplotni tok, ki spremlja konvekcijsko gibanje. Vendar je naša preprosta slika za tak račun prešibka. Rezultat je tako močno odvisen od robnih pogojev, da je praktično nemogoče izdelati točno teorijo celo za najpreprostejše primere.

Zamislimo si element snovi, ki se dviguje v konvekcijskem toku. Od okolne snovi ga lahko ločimo samo toliko časa, dokler se ne zlije z njo. Razdaljo, na kateri se element zlije z okolico, imenujemo mešalna dolžina. Če poznamo mešalno dolžino, lahko izračunamo, koliko časa bo posamezen element snovi potreboval, da prepotuje to razdaljo (viskoznost seveda zanemarimo) in koliko energije bo prenesel na tej poti. Odtod pa izračunamo, kolikšen bo toplotni tok. Po tej poti pridemo do naslednjega izraza za toplotni tok zaradi konvekcije:

$$j(r) = \frac{\rho c_p}{r} \left( \frac{GM(r)}{T} \right)^{1/2} (\Delta\nabla T)^{3/2} \frac{l^2}{4} \quad (2.39)$$

Tukaj je  $c_p$  specifična toplota plina v zvezdi,  $l$  pa mešalna dolžina. Pri laboratorijskih poskusih se pokaže, da je ta parameter primerljiv z linearnimi razsežnostmi prostora, v katerem se konvekcija vrši.

Seveda je mešalna dolžina kritični parameter fenomenološke slike konvekcije in o njej ne vemo preveč. Vendar pa je kljub temu večkrat mogoče narediti dobre modele zvezd. Pomaga nam tudi dejstvo, da je konvekcija za velik faktor bolj uspešna pri prenašanju toplote kot sevanje, tako da superadiabatski gradienti, ki so za vse druge račune zanemarljivo majhni, že poganjajo na površje vso energijo, ki jo zvezda lahko proizvede v notranjosti. Enačbe (2.39) zato v modelu skoraj ni treba uporabljati, ampak jo lahko beremo takole; če da enačba sevalnega ravnovesja pozitiven superadiabatski gradient, nadomesti temperaturni gradient z adiabatiskim, kajti konvekcija, ki se bo razvila, bo že z izredno majhnim superadiabatskim gradientom mogla prenesti dovolj energije.

Poiščimo oceno za superadiabatski gradient v Soncu! Vzemimo, da se vrši konvekcija v plasti s polmerom  $R_\odot/2$ , kjer je gostota  $1 \text{ g/cm}^3$  (to je povprečna gostota Sonca), mešalna dolžina pa naj bo del Sončevega radija ( $l = \alpha R$ ). Izsev Sonca pri  $R = R_\odot/2$  je kar  $L_\odot$ , saj se vsa energija proizvede globoko v notranjosti. Ko vstavimo vse konstante v formulo (2.39), dobimo iz nje naslednjo oceno:

$$\Delta\nabla T \sim 10^{-10} \frac{K}{m} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{4/3}.$$

Čeprav bi se vršila konvekcija v plasti z debelino le 1/1000 Sončevega polmera, bi bil superadiabatski gradient še vedno samo  $10^{-6} \text{ K/m}$ ! Iz tega sledi, da lahko konvekcijo največkrat kar zanemarimo.

Enačbe (2.1'), (2.2), (2.3') ter (2.32) ali (2.39) tvorijo zaključen sistem diferencialnih enačb, ki jim pravimo *enačbe zvezdne strukture*. Odločitev med (2.32) ali (2.39) je, kot smo povedali, odvisna od superadiabatskega temperaturnega gradienta (2.38). Rešitve enačb zvezdne strukture predstavljajo matematične modele zvezd. Seveda pa lahko postavimo modele samo, če poznamo lastnosti snovi v zvezdah, to je prosojnost  $\kappa(\rho, T)$ , hitrost proizvodnje jedrske energije  $\varepsilon(\rho, T)$  ter enačbo stanja  $p(\rho, T)$ .

## 2.4 Naloge

- 2.1 Oцени temperaturo in pritisk v središču Sonca. Predpostavi, da je Sonce doseglo stacionarno stanje nerotirajoče homogene zvezde v hidro in termodinamičnem ravnovesju. Sonce je sestavljeno iz idealnega plina (plazme) s sestavo 70% (mase) vodika, ~30% in ~1% ostalih težkih elementov.

## Poglavje 3

# Lastnosti snovi v zvezdah

### 3.1 Enačbe stanja in stanje snovi v zvezdah

V normalnih zvezdah, to je v zvezdah, ki spadajo na glavno vejo Hertzsprung - Russellovega diagrama, lahko računamo z enačbo idealnega plina

$$p = nkT, \quad (3.1)$$

kjer je  $n$  število delcev v enoti prostornine,  $k$  pa Boltzmanova konstanta. Ta enačba stanja nam je dovolj dobro znana, da o njej ne bi bilo potrebno izgubljeni dosti besed. Vendar je zanimivo nekoliko več povedati o tem, zakaj je ta enačba dobra, kljub velikim gostotam ioniziranega plina v središčih zvezd (v središču Sonca znaša gostota okrog  $100\text{ g/cm}^3$ ).

V splošnem velja, da se plin obnaša kot idealen, če je povprečna prosta pot delcev v plinu dosti večja od povprečne razdalje med njimi; ali z drugimi besedami, plin se obnaša kot idealen, če povprečen delec v plinu bistveno spremeni svojo gibalno količino zaradi trkov, ko premeri razdaljo, ki je mnogo večja od povprečne razdalje med sosedi.

Plin je v notranjosti zvezd skoraj popolnoma ioniziran, saj je povprečna termična energija delcev pri nekaj milijonih stopinj Kelvina že dovolj visoka, da razbije atome vodika in helija, ki sta glavni sestavini zvezdne snovi. V takem ioniziranem plinu, ki ga imenujemo plazma, so elektromagnetne interakcije med delci edine pomembne, saj so razdalje med delci ( $d \sim 10^{-9}\text{ cm}$  pri gostoti  $100\text{ g/cm}^3$ ) mnogo večje od njihove velikosti ( $r_{\text{protona}} \sim 10^{-13}\text{ cm}$ ). Električne sile imajo dolg doseg, vendar močno sipljejo le, če se delca med trkom dovolj približata. Razdelimo trke med delci na bližnje in oddaljene! Rekli bomo, da je trk bližnji, če se delca odklonita iz prvotne smeri za več kot za kot  $\vartheta_0$  in oddaljeni, če je odklon manjši. Seveda je meja med bližnjim in oddaljenimi trki poljubno postavljena, vendar je očitno, da je prenos gibalne količine na povprečen trk tem manjši, čimbolj redki so bližnji trki. Pri malo verjetnih bližnjih

trkih so zato elektromagnetne interakcije zanemarljive in plazma se obnaša kot idealen plin.

Poglejmo našete pogoje nekoliko bolj podrobno! V prvem približku lahko vzamemo, da so nabiti delci homogeno porazdeljeni po prostoru, zato je verjetnost za bližnji trk približno enaka

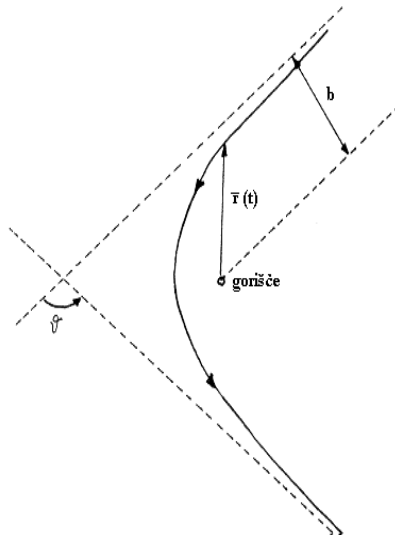
$$w_b \approx \frac{\pi b_c^2}{\pi d^2},$$

kjer je  $d$  povprečna razdalja med delci,  $b_c$  pa tisti kritični parameter, ki deli trke na bližnje in oddaljene. V dovolj redki plazmi so bližnji trki redki in jih lahko obravnavamo kot problem dveh teles. Ko vpeljemo relativne koordinate med delcema, dobimo enačbo gibanja v obliki

$$\bar{m}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

kjer je  $\bar{m}$  reducirana masa delcev, ki sodelujeta v trku ( $\bar{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ),  $\mathbf{r}$  je radij vektor, ki povezuje delca,  $Z_1$  in  $Z_2$  pa sta njuna naboja (v enotah osnovnega naboja). Vemo, da so orbite, ki jih opisuje radij vektor  $\mathbf{r}$  stožnice - v našem primeru hiperbole. Uporabimo še zakon o ohranitvi energije in vrtilne količine (dva integrala gornje enačbe), pa dobimo za kot odklona delca iz osnovne smeri

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 r_{kl} m_e c^2}{b \bar{m} v_0^2},$$



Slika 3.1.



kjer je  $\vartheta$  kot odklona,  $b$  parameter trka,  $v_0$  relativna hitrost obeh delcev v veliki oddaljenosti,  $m_e$  masa elektrona,  $r_{kl}$  pa klasični radij elektrona. Kritični parameter trka je odtod

$$b_c = Z_1 Z_2 r_{kl} \frac{m_e c^2}{\frac{1}{2} \bar{m} v_0^2},$$

kjer smo za  $\vartheta_0$  zaradi udobnosti izbrali  $\vartheta_0 = 2 \arctan \frac{1}{2} (= 53^\circ)$ .

V plinu s temperaturo  $T$  je povprečna kinetična energija delcev  $\frac{3}{2} kT$ , zato je povprečni kritični parameter za delce z nabojem  $Z_1$  in  $Z_2$  enak

$$\langle b_c \rangle = Z_1 Z_2 r_{kl} \frac{m_e c^2}{\frac{3}{2} kT}. \quad (3.2)$$

Pogoj za to, da se plazma obnaša kot idealni plin ( $w_b \ll 1$ ) lahko torej napišemo v naslednji obliki

$$w_b = (Z_1 Z_2 r_{kl} \frac{m_e c^2}{\frac{3}{2} kT} n^{1/3})^2 \ll 1. \quad (3.3)$$

Ocenimo kritični parameter trka za plazmo v središču Sonca, kjer je temperatura  $15 \cdot 10^6 K$ ! Če vzamemo, da je plin v središču v glavnem vodik, je  $Z_1 = Z_2 = 1$  in dobimo

$$\langle b_c \rangle = 5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}.$$

Povprečna razdalja med delci ( $d = n^{-1/3}$ ) pa je pri gostoti  $100 \text{ g/cm}^3$ , približno  $2 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$ . Verjetnost za bližnji trk je torej res majhna in enačba idealnega plina (3.1) v središču Sonca prav tako dobro velja. Če vzamemo, da je temperaturni gradient v zvezdi blizu adiabatskemu (modeli pokažejo, da je to kar dobra ocena), lahko iz enačbe hidrostatičnega ravnovesja tudi vidimo, da je verjetnost za bližnji trk, ki jo razen numeričnih faktorjev določa le razmerje  $(\frac{n}{T^3})^{2/3}$ , celo počasi pada proti površini. Zato lahko pričakujemo, da je vpliv elektrostatskih interakcij po vsem Soncu zanemarljiv.

Navadno računamo z gostoto mase in ne z gostoto delcev, zato bomo gostoto delcev izrazili z gostoto mase in sestavom zvezdne plazme. Seveda je

$$n = \sum_i n_i,$$

kjer predstavljajo  $n_i$  delne gostote posameznih komponent. Gostota mase pa je

$$\rho = \sum m_i n_i,$$

z  $m_i$ , kot maso delca  $i$ -te vrste.

V astrofiziki računamo z utežnimi razmerji posameznih komponent (utežno razmerje elektronov zanemarimo, ker je njihova masa majhna), ki so definirane kot

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\rho} = \frac{m_p}{\rho} n_i A_i .$$

Tu nastopa  $A_i$  kot atomska masa  $i$ -te vrste in  $m_p$  kot masa protona. V popolnoma ionizirani plazmi pride na vsak atom z vrstno številko  $Z_i$  ravno  $Z_i$  elektronov, zato je gostota elektronov enaka

$$n_e = \sum_{\text{po jedrih}} Z_i n_i .$$

Gostota delcev je tako

$$n = \sum_{\text{po jedrih}} n_i + \sum_{\text{po jedrih}} Z_i n_i = \frac{\rho}{m_p} \sum (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i} = \frac{\rho}{\bar{\mu}} , \quad (3.4)$$

kjer je količina  $\bar{\mu}$ , ki je definirana z zadnjo enakostjo, očitno povprečna masa delca v plazmi.

Utežni razmerji najpogostejših elementov v zvezdah - vodika in helija - se navadno označita z  $X$  in  $Y$ , za težje elemente, ki jih ni za več kot tri odstotke, pa se računa s povprečnim utežnim razmerjem  $Z$ .

S tem pa še ne smemo popolnoma zaključiti razprave o plinski enačbi v zvezdah. Do sedaj smo namreč govorili samo o popolnoma ionizirani plazmi, ki se nahaja v sredicah zvezd. Ko pa gremo proti površju, temperatura pada in s tem tudi stopnja ionizacije. Tudi v plazmi, ki je le delno ionizirana in ni preveč gosta, shajamo z enačbo idealnega plina v obliki  $p = nkT$ , s tem da je gostota delcev  $n$  število vseh prostih delcev (jeder, ionov in elektronov) v enoti prostornine. To število je odvisno od temperature in od gostote, saj se jedro in elektroni, ki so nanj vezani, štejejo kot en sam delec. Računov za povprečno število elektronov, ki so vezani na jedro z nabojem  $Z_i$ , tukaj ne bomo navajali, bralec pa si jih lahko ogleda npr. v knjigi J.P. Cox and R.T. Giuli: *Principles of Stellar Structure*. Tam preberemo, da je odstopanje od formule (3.1) zaradi vezanja elektronov na jedra že znatno, če temperatura pade pod 100 000 K; za večino zvezd je to tik pod površjem.

Razen tlaka, ki ga povzročajo atomi in elektroni s svojim gibanjem, je v nekaterih večjih zvezdah pomemben še *sevalni tlak fotonov*.

$$p_{sev} = \left(\frac{\sigma}{3c}\right) T^4 \quad (3.5)$$

V modelih za zvezde spektralnega tipa  $O$  ali  $B$  je prispevek tega člena do nekako 10% celotnega tlaka. Zanimiv pa je argument, da zaradi tega prispevka k tlaku ne najdemo zvezd, ki bi imele več kot kakih sto Sončevih mas. Sklepamo takole: če bi v neki zvezdi prevladal sevalni tlak, bi bila ta nestabilna, saj je adiabatni indeks fotonskega plina  $\frac{4}{3}$  (glej poglavje o relaksacijskih časih). Redek plin, ki bi tako močno

svetil, da bi fotonski tlak prevladal. Plin bi se nato razpihnil, nastali fragmenti pa bi se skrčili v manjše zvezde. Ocenimo maso pri kateri bi prišlo do takega pojava!

Že na prvih straneh smo dobili ocene za tlak in temperaturo plazme v središču zvezde (enačb (2.7) in ostale ocene). Odtod lahko takoj dobimo oceno za razmerje med sevalnim tlakom in celotnim tlakom v središču zvezde.

$$\frac{p_{sev}}{p_c} \approx \frac{(\sigma/3c)T^4}{3GM^2/4\pi R^4} = \frac{(\sigma/3c)\left(\frac{\bar{\mu}c^2GM}{kRc^2}\right)^4}{3GM^2/4\pi R^4}$$

Če izrazimo Stefanovo konstanto  $\sigma$  s fundamentalnimi konstantami ( $\sigma = \frac{\pi^2}{90} \frac{k^4}{\hbar^3 c^2}$ ) in vpeljemo Planckovo maso <sup>1</sup>  $m_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.18 \cdot 10^{15} \text{ g}$ , lahko gornje razmerje napišemo v pregledni obliki

$$\frac{p_{sev}}{p_c} \approx \frac{\pi^2}{45} \left( \frac{\bar{\mu}^2 M}{m_{Pl}^3} \right)^2. \quad (3.6)$$

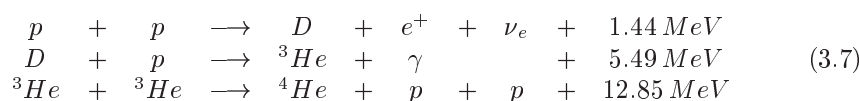
Če je masa  $M$  enaka  $16 M_\odot$ , je to razmerje enako 1. Pri tako masivnih zvezdah je torej tlak fotonov že močno pomemben. Natančnejši računi pokažejo, da je naša ocena sicer nekoliko prenizka (približno za faktor 5), vendar kvalitativno pojasni nestabilnost velikih zvezd.

## 3.2 Jedrske reakcije

Omenili smo že, da je glavni energijski rezervoar zvezde jedrska energija, ki se sprošča ob zlivanju jeder pri dovolj visokih temperaturah. Daleč največ energije se sprosti pri reakciji zlivanja vodika v helij. Ta proces lahko poteka po dveh poteh in sicer takozvani reakciji  $p$ - $p$  ali kot *ogljikov cikel*. Ti dve reakciji sta razmeroma dobro preučeni in izrazi za gostoto sproščene energije, kot jih bomo zapisali, precej dobro opisujejo realno stanje.

### 3.2.1 Zlivanje vodika v helij

Jedrska reakcija v kateri upoštevamo ohranitvene zakone in pretvarja vodik v helij v prvi verigi proton-proton <sup>2</sup> **p-p I** poteka takole:



Ta veriga poteka preko posrednega nastajanja devterija  $D$  ( ${}^2H$ ) in helija-3.

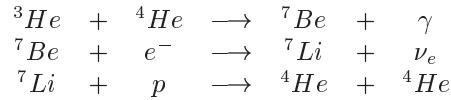
Vsaka reakcija **pp I** verige ima zaradi različnih Coulombovih pregrad svojo reakcijsko

<sup>1</sup>Kaže, da igra Planckova masa v astrofiziki posebno pomembno vlogo. Glej npr. D.W. Sciama: *Black Holes and their Thermodynamics*, *Vistas in Astronomy*, **19**, 385, 1976.

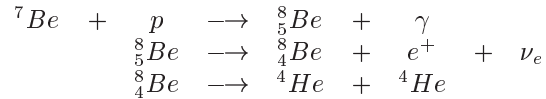
<sup>2</sup>Protone  $p$  predstavljajo vodikova jedra  ${}^1H$

stopnjo. Najpočasnejša je prva - začetna stopnja, ki se zgodi zaradi razpada protona v nevtron in vsebuje šibko silo (četrti sila).

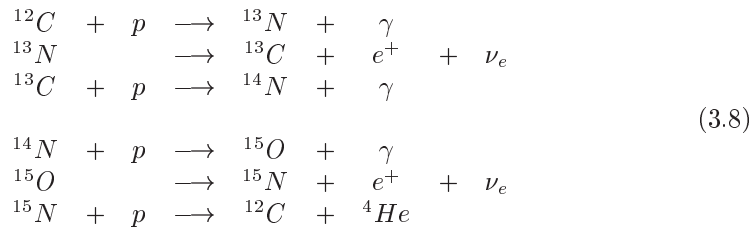
Produkcija jedra helija-3 v **pp I** verigi omogoča tudi možnost neposredne interakcije z jedrom helija-4, katere posledica je nova veja verige proton-proton. V okolju značilnem za jedro Sonca interagira v 69% helij-3 s helijem-3 (veriga pp I), v 31% pa steče veriga **pp II**:



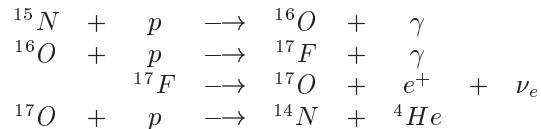
Vendar je možna še tretja veja verige **pp**, ki lahko nastane kot konkurenca ujetju elektrona v jedro berilija-7 pri verigi **pp II**. Ujetje protona je malo verjetno a se zgodi v 0.3% in tako tvori tretjo verigo **pp III**.



Za produkcijo helija-4 obstaja tudi drugi, neodvisen cikel. Reakcije tega, *ogljikovega cikla CNO* potekajo pri nekoliko višjih temperaturah na naslednji način:



kjer se ogljik, dušik in kisik uporabljajo kot katalizatorji. Pri zgornji veji reakcij gre za produkcijo ogljika-12 in helija-4. V drugi veji ogljikovega cikla, ki se zgodi le v 0.04%, pa v končni reakciji (3.8) nastane raje kisik-14 in foton kot ogljik-14 in helij-4.



Učinek obeh reakcij (p-p in CNO) je isti, to je zlivanje štirih protonov v helijevo jedro, le da je za reakcijo ogljikovega cikla potrebna prisotnost ogljika-12 in (ali)

dušika-14 kot katalizatorja. V normalni zvezdni snovi je vedno dovolj teh stabilnih izotopov, da reakcija lahko steče ( $X_{CNO} \sim 0.003$ ).

Pri zlivanju vodika v helij se sprosti  $27.8 \text{ MeV}$  energije na vsak formiran helijev atom, ki se razdeli med žarke  $\gamma$ , delce in nevtrine. Energija žarkov  $\gamma$  in delcev se s trki hitro prenese na okolno snov in jo s tem segreje, medtem ko nevtrino večinoma popolnoma svobodno pobegne in je njegova energija za zvezdo izgubljena. Pri reakcijah ogljikovega cikla odnesejo nevtrini v povprečju nekoliko več energije kot pri reakcijah p-p, tako da ostane v zvezdi v povprečju  $25.0 \text{ MeV}$  na nastali helijev atom v reakciji ogljikovega cikla in  $26.2 \text{ MeV}$ , če je bil helijev atom proizveden z reakcijo p-p.

Računanje hitrosti reakcij zlivanja protonov v helij na srečo ne zahteva zelo natančnega poznavanja vseh podrobnosti jedrske fizike. Ugotovili smo že, da so temperature v notranjosti zvezd, kjer take reakcije potekajo, okrog  $10^7 \text{ K}$  in je torej povprečna termična energija delcev v zvezdi le kakih  $1000 \text{ eV}$ . To pomeni, da poteka reakcija po direktni poti in so prispevki resonančnih pojavov zanemarljivi.

Hitrost reakcije med delci 1 in 2 definiramo kot število reakcij med temi delci v enoti prostornine in časa. Naj bodo delci 1 tarča, ki jo zadevajo delci 2. Število zadetkov v enoti prostornine in časa je enako produktu toka delcev 2: ( $v n_2$ ) in površini tarče 1 v enoti prostornine: ( $q(v) n_1$ ), kjer je  $v$  relativna hitrost med projektili in tarčo,  $q(v)$  presek za sipanje delca 1 na 2,  $n_1$  in  $n_2$  pa sta številske gostote delcev 1 in 2. Število reakcij dobimo, če pomnožimo število zadetkov z verjetnostjo, da zadetek sproži reakcijo. Ta je enaka produktu verjetnosti za tuneliranje skozi coulombsko pregrado med nabitima delcema ( $P_p(v)$ ) in verjetnosti, da reakcija steče po zaželenem kanalu, potem ko je že prišlo do tuneliranja ( $P_N$ ). Ker so vse gornje verjetnosti še odvisne od relativne hitrosti med projektilom in tarčo, moramo delce v plinu razdeliti na hitrostne razrede in sešteti prispevke iz posameznih razredov. *Hitrost reakcije*  $n$  napišemo tako v naslednji obliki

$$\dot{n} = \int_0^\infty v n_2 q(v) n_1 P_p(v) P_N D(T, v) dv . \quad (3.9)$$

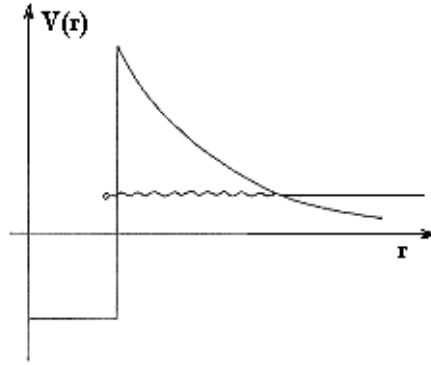
Posamezne parametre v gornji formuli je potrebno bodisi izmeriti v laboratoriju, bodisi izračunati na osnovi teoretskih modelov. Glavno temperaturno odvisnost hitrosti reakcije določata verjetnost za tuneliranje  $P_p(v)$  in Boltzmannov faktor  $D(T, v)$ . *Boltzmannov faktor* je seveda

$$D(T, v) = \left(\frac{\bar{m}}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{\bar{m}v^2}{2kT}} , \quad (3.10)$$

kjer je  $\bar{m}$  reducirana masa za delca 1 in 2, ki vstopata v reakcijo.

$$\bar{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.11)$$

Verjetnost za tuneliranje pa lahko izračunamo, če poznamo obliko potencialne pregrade. Navadno naredimo približek potenciala med dvema jedroma s coulombskim potencialom  $\frac{1}{r}$ , ki ga na neki razdalji  $r_0$  nadomesti potencialna jama jedrskih sil (Slika 3.2)



Slika 3.2: Približni potencial jedra s coulombsko pregrado.

Ta približek je dovolj dober, kadar je medsebojna hitrost delcev majhna, tako da je dolžina tunela skozi pregrado mnogo večja od dosega jedrskih sil. Iz kvantnomehanskega izračuna tako dobimo izraz za *verjetnost tuneliranja*

$$P_p(v) \propto e^{-2\pi\alpha Z_1 Z_2 \frac{e}{v}}, \quad (3.12)$$

kjer je  $\alpha$  konstanta fine strukture ( $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ ),  $Z_1$  in  $Z_2$  pa naboja jeder, ki reagirata.

Boltzmannov faktor ima maksimum pri hitrosti, ki ustreza povprečni termični energiji  $\frac{3}{2}kT$  (okrog 1000 eV), ter močno pada pri višjih hitrostih, verjetnost za tuneliranje pa zraste šele, ko postane medsebojna hitrost znaten del svetlobne hitrosti. Produkt teh dveh faktorjev je tako funkcija, ki ima znatne vrednosti samo v zelo ozkem intervalu okrog ekstrema pri

$$v_0 \sim \bar{v}_{termična} (\pi Z_1 Z_2 \alpha (\frac{mc^2}{2kT})^{1/2})^{1/3} \quad (3.13)$$

Za reakcijo p-p in pri temperaturi  $10^7$  K je  $v_0 = 2.25 \bar{v}_{termična}$ .

Integral (3.9) dobi preprosto obliko, če v vse ostale faktorje, ki se s hitrostjo počasi spreminjajo, vstavimo kar  $v_0$ . Potem je

$$\dot{n} \propto e^{-3(\pi Z_1 Z_2 \alpha (\frac{mc^2}{2kT})^{1/2})^{2/3}} \quad (3.14)$$

Zaradi krajše pisave uvedemo *karakteristično temperaturo za jedrske reakcije*

$$T_n = \frac{\alpha^2 m_p c^2}{4\pi^2 k} = 14.8 \cdot 10^6 \text{ K} \quad (3.15)$$

Gornja formula se potem glasi

$$\dot{n} \propto \text{Exp}(-3(\pi Z_1 Z_2 \alpha)^{2/3} (\frac{2\bar{m}}{m_p} \frac{T_n}{T})^{1/3}) \quad (3.16)$$

Iz tega izraza vidimo, da je pri nižjih temperaturah ogljikov cikel zaradi visokega naboja jeder in visoke reducirane mase dosti močnejše dušen kot reakcija p-p. Vendar so preseki za reakcije v ogljikovem ciklu ugodnejši, tako da te reakcije sčasoma dosežejo reakcijo p-p. Pri še višji temperaturi pa ogljikov cikel popolnoma prevlada, ker je njegova temperaturna odvisnost, kakor kaže zgornji izraz dosti bolj strma kot temperaturna odvisnost za reakcijo p-p.

V stacionarnem stanju poteka jedrsko gorenje v povprečju ravno po stopnjah, kot so napisane v (3.7) (če prevlada reakcija p-p) ali (3.8) (če prevlada ogljikov cikel). Tako mora npr. na vsako zlitje protonov v reakcij p-p priti v povprečju eno zlitje protona z devterijem, na dve taki reakciji pa eno zlitje dveh  ${}^3\text{He}$  v  ${}^4\text{He}$ . Hitrosti teh reakcij morajo biti zato v naslednjem razmerju:

$$\dot{n}_{p-p} = \dot{n}_{p+D} = 2\dot{n}_{\text{He}+{}^3\text{He}} \quad (3.17)$$

Reakcije tečejo v takem stacionarnem zaporedju le, če so koncentracije posameznih komponent v ravnovesnem razmerju. Računi na modelih zvezd so pokazali, da se vzpostavijo ravnovesne koncentracije v zvezdah s približno takšno maso kot je Sončeva, v nekako 100 milijonih let, kar je le stotina dobe, v kateri Sonce izrablja gorenje vodika kot vir energije.

Energija, ki se sprosti pri jedrskih reakcijah, je enaka vsoti energij na posamezno vrsto reakcij v ciklu. Energija na vrsto reakcije v enoti prostornine in časa pa je seveda enaka hitrosti reakcije, pomnoženi z energijo, ki se odda pri eni sami reakciji. V ravnovesju, kjer so hitrosti reakcij povezane, je proizvedena energija v enoti prostornine in časa, enaka energiji vseh reakcij v ciklu, pomnoženi s številom ciklov (na enoto prostornine in časa), to je s hitrostjo ene od reakcij, ki v ciklu samo enkrat poteče.

Ko so vstavili eksperimentalne podatke v (3.9) in izračunali hitrost reakcij po opisani poti, so dobili za proizvodnjo jedrske energije v zvezdah na enoto mase in časa, naslednje izraze:

a.) Za reakcijo p-p:

$$\varepsilon_{p-p} = K_{p-p} \rho X^2 \left(\frac{T_n}{T}\right)^{2/3} e^{-13.77 \left(\frac{T_n}{T}\right)^{1/3}}, \quad (3.18)$$

kjer je  $K_{p-p} = 0.034 \text{ J m}^3 / \text{kg}^2 \text{ s}$ .